



Raphaël GRANIER DE CASSAGNAC (raphael@in2p3.fr)

Henri BACHACOU (henri.bachacou@cern.ch)

(avec la participation de Hervé MOUTARDE)

Particules élémentaires :
entre relativité restreinte
et mécanique quantique

Table des matières

1	Histoire et zoologie	1
1.1	Baryons, mésons et leptons	1
1.1.1	Les premières particules élémentaires	1
1.1.2	L'anti-matière	2
1.1.3	Pions et muons	3
1.1.4	Conservation du nombre baryonique	4
1.1.5	Les particules étranges	5
1.1.6	Résumé de la situation au début des années 60	7
1.2	Quarks et leptons	8
1.2.1	Découverte des quarks	8
1.2.2	Les leptons	13
1.2.3	Le quatrième quark	14
1.2.4	La troisième famille	17
1.3	Un mot des interactions	18
1.3.1	Le vertex élémentaire électromagnétique	18
1.3.2	Interactions forte et faible	20
1.3.3	De l'intérêt des vertex	22
2	Relativité restreinte	23
2.1	Les origines de la théorie de la relativité	23
2.1.1	Relativité galiléenne : relativité de l'espace	23
2.1.2	Conflit entre mécanique newtonienne et électromagnétisme	25
2.1.3	Tentatives de vérification de la théorie de l'éther	26
2.2	Implications d'une vitesse invariante de la lumière	26
2.2.1	Dilatation du temps	33
2.2.2	Contraction des longueurs	34
2.3	Cinématique	36
2.3.1	Transformation de Lorentz	36
2.3.2	Temps propre et longueur propre	42
2.4	Géométrie de la relativité restreinte	47
2.4.1	Notions de calcul tensoriel	48
2.4.2	Structure géométrique de l'espace-temps	50
2.4.3	Dynamique relativiste	53
2.5	Application aux collisions de particules	61
2.5.1	Bilan énergétique	61

2.5.2	Sections efficaces totales	64
2.5.3	Sections efficaces différentielles	66
3	Mécanique quantique	71
3.1	Dualité onde-corpuscule	71
3.1.1	Principe	71
3.1.2	L'effet photoélectrique	72
3.1.3	L'effet Compton	74
3.1.4	Aspect ondulatoire de l'électron	75
3.1.5	Corpusculaire ou ondulatoire?	76
3.2	Mécanique ondulatoire	78
3.2.1	Interprétation probabiliste	78
3.2.2	L'équation de Schrödinger	79
3.2.3	L'équation d'évolution	79
3.2.4	La particule libre	79
3.2.5	Les paquets d'onde	80
3.3	Prendre des mesures	81
3.3.1	Équations aux valeurs propres	82
3.3.2	Résultat d'une mesure...	82
3.3.3	Mesures simultanées	83
3.4	Le moment cinétique	84
3.4.1	Les observables?	84
3.4.2	Le moment cinétique orbital	84
3.4.3	Le spin	85
3.4.4	Conservation du moment cinétique	87
4	Kaons neutres et symétries discrètes	89
4.1	Les kaons neutres	89
4.1.1	Deux particules plutôt semblables	89
4.1.2	Deux particules plutôt quantiques	91
4.1.3	La base K_1/K_2	92
4.1.4	Oscillations de kaons	93
4.2	Les symétries discrètes	97
4.2.1	L'inversion de parité \mathcal{P}	97
4.2.2	La conjugaison de charge \mathcal{C}	99
4.3	Les kaons neutre et \mathcal{CP}	100
4.3.1	Paire de kaons	100
4.3.2	Des états propres de \mathcal{CP}	101
4.3.3	La violation de \mathcal{CP}	102
4.3.4	Des intérêts quasi-culturels de la violation de \mathcal{CP}	103
5	Entre relativité restreinte et mécanique quantique	109
5.1	Les désintégrations	109
5.1.1	Bilan énergétique	109
5.1.2	Durée de vie	110

5.1.3	Désintégration quantique	111
5.1.4	Modes de désintégration	114
5.2	Petite théorie quantique de l'attraction	114
5.2.1	L'attraction chimique	116
5.2.2	L'interaction forte	119
5.2.3	L'interaction électromagnétique	120
5.2.4	L'analogie des bateaux	121
5.2.5	Retour sur les particules virtuelles	121
5.3	Difficile succès d'une théorie quantique relativiste	122
5.3.1	Mécanique quantique relativiste	122
5.3.2	L'équation de Dirac	124
ANNEXES		127
A Relativité restreinte : compléments mathématiques		127
A.1	Lemmes préparatoires	127
A.2	Calcul tensoriel	130
B Contrôle du 7 juin 2010		133
C Systèmes d'unités		139
C.1	Unités de Gauss	139
C.2	Unités naturelles	140
C.3	Exemple de l'électron	141
C.4	Ordre de grandeur gravitationnel	142
Références bibliographiques		143
Index		145

Table des figures

1.1	Octet mésonique dans le plan étrangeté/isospin.	9
1.2	Octet baryonique dans le plan hypercharge/isospin.	9
1.3	Décuplet baryonique dans le plan hypercharge/isospin.	10
1.4	Octet mésonique en terme de quarks.	11
1.5	Octet baryonique en terme de quarks.	12
1.6	Décuplet baryonique en terme de quarks.	12
1.7	Multiplets mésoniques fabriqués avec quatre quarks.	15
1.8	Multiplets baryoniques fabriqués avec quatre quarks.	16
1.9	Les vertex élémentaires des interactions fondamentales. N'ont pas été représentés les vertex d'interaction des bosons médiateurs entre eux.	19
1.10	Différentes interprétations du vertex électromagnétique, selon son positionnement par rapport au sens d'écoulement du temps.	20
2.1	Référentiels en mouvement relatif de translation.	24
2.2	Schéma de l'expérience de Michelson - Morley.	27
2.3	Diagramme d'espace-temps.	28
2.4	Réflexion en R d'un photon émis en I, dans le référentiel \mathcal{R}'	29
2.5	La même réflexion qu'à la figure 2.4, vue dans le référentiel \mathcal{R}	29
2.6	Diagramme d'espace-temps d'une particule se propageant de I à F à une vitesse $w > c$. On peut comparer les coordonnées temporelles de I et F dans \mathcal{R}' en projetant F sur l'axe $\mathcal{O}t'$ parallèlement à l'axe $\mathcal{O}x'$: $t'_F < t'_I$, c'est-à-dire que, du point de vue de \mathcal{R}' , la particule est arrivée avant d'être partie !	32
2.7	Cône de lumière.	33
2.8	Diagramme d'espace-temps d'une barre rigide au repos dans le référentiel \mathcal{R} . La barre est représentée dans le référentiel \mathcal{R} aux instants t_I et t_F par les segments I_1I_2 et F_1F_2 (resp.), ainsi que dans le référentiel \mathcal{R}' aux instants t_I et t_F par les segments $I_1I'_2$ et $F_1F'_2$ (resp.).	35
2.9	Linéarité des formules de changement de référentiel inertiel.	37
2.10	Expression des composantes des vitesses dans 2 référentiels en mouvement relatif.	39
2.11	Aberration lumineuse pour $\beta=0, 0,75$ et $0,99$; la courbure est une fonction croissante de β	40
2.12	Aberration lumineuse pour $\beta=0$ et $0,75$; la courbure est une fonction croissante de β	41

2.13	Référentiel propre.	42
2.14	Horloge fixe et trajectoire fermée.	46
2.15	Vitesse (adimensionnée) d'un électron libre en fonction de son énergie (en keV).	58
2.16	L'accélérateur linéaire de Stanford, vue aérienne (à gauche). Un klystron (à droite).	63
2.17	Sections efficaces (en millibarns) d'interaction de quelques particules usuelles en fonction de l'énergie (en GeV) dans le référentiel du centre de masse.	65
2.18	Sections efficaces $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ en fonction de l'énergie en GeV.	67
3.1	L'effet photoélectrique sur des électrons possédant une énergie de liaison de 2 eV.	73
3.2	L'effet Compton. Un photon incident de longueur d'onde λ_i éjecte un électron en changeant de longueur d'onde.	74
3.3	Dans l'effet photoélectrique, des photons révèlent leur caractère corpusculaire. Dans l'expérience de Davisson et Germer, des électrons sont diffractés par un cristal dans des directions angulaires précises, révélant ainsi qu'ils peuvent se comporter en onde.	75
3.4	Dans l'expérience de Stern et Gerlach un jet de particules est dévié par un gradient de champ magnétique. Au lieu des dispersions classiques permises, les moments magnétiques semblent se projeter avec des valeurs précises sur l'axe du champ.	85
4.1	Oscillation flagrante d'un kaon neutre.	95
4.2	Courbes d'oscillation des kaons détectés par leur désintégration semi-leptonique. Distribution des désintégrations semi-leptoniques d'un kaon initialement dans l'état K^0 , en fonction du temps exprimé en multiples du temps de vie propre τ_1	96
4.3	Dans l'expérience de madame Wu, des électrons sont émis à l'opposé du spin nucléaire. L'image de l'expérience par parité, dans laquelle les électrons sont émis dans le même sens que le spin nucléaire, n'est pas réalisée.	99
4.4	Vision moderne de l'oscillation des kaons neutres.	106
5.1	La masse d'une particule se désintégrant n'est pas parfaitement définie mais suit une distribution de Breit-Wigner.	113
5.2	Description des états $ 1\rangle$ et $ 2\rangle$ de l'ion H_2^+	116
5.3	Niveaux d'énergie de l'ion H_2^+	117
5.4	Gauche : Allure des énergies des états stationnaires du système H_2^+ en fonction de la distance entre les protons. Droite : résultat d'un calcul plus rigoureux tenant compte de la répulsion coulombienne ($E_H = 13,6$ eV).	119

Liste des tableaux

1.1	Les particules découvertes au début des années 60. Les antibaryons n'ont pas été portés, mais possèdent la même masse que leur baryon associé, mais une charge et une étrangeté S opposées. Les particules sur une même ligne n'ont pas rigoureusement la même masse, sauf quand elles sont antiparticules l'une de l'autre (e^+/e^- , μ^+/μ^- , π^+/π^- , K^+/K^- , K^0/\bar{K}^0). Dans les autres cas les différences sont de l'ordre du MeV/c^2 , petites devant les différences entre lignes du tableau.	7
1.2	Les trois premiers quarks et leurs nombres quantiques. Les antiquarks ont des nombres quantiques opposés.	10
1.3	Les leptons et leurs nombres quantiques. Les anti-leptons ont des nombres opposés.	13
1.4	Les particules élémentaires de 1964 et l'intuition de l'existence d'un quatrième quark.	14
1.5	Les particules de matière connues aujourd'hui, ainsi que leur masse en MeV/c^2 . À chacune de ces particules correspond une antiparticule de même masse, mais de charge opposée.	17
1.6	Les interactions fondamentales et leurs bosons médiateurs. Les intensités relatives sont celles qui s'exercent sur deux quarks up distants de 3.10^{-17} m, l'interaction électromagnétique étant arbitrairement prise comme référence.	19
2.1	Minimum vital pour la physique des particules (si on n'oublie pas que $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$).	56
2.2	Lien entre 4-vitesse et 4-impulsion.	58
3.1	Spin et moment magnétique de quelques particules.	87
4.1	Temps de vie et modes de désintégration des kaons neutres. Leurs masses sont en fait légèrement différentes : $\Delta m = 3,49.10^{-12} \text{ MeV}/c^2$ (voir page 95).	94
4.2	Les kaons neutres dans tous leurs états. On a longtemps cru que les K_S et K_L étaient K_1 et K_2 , comme dans le tableau 4.1.	103

-
- 5.1 Temps de vie et modes de désintégration de quelques particules. Les quantités entre parenthèses ne sont pas mesurées, mais déduites de la relation $\Gamma \times \tau = \hbar$. Chacune de ces particules possède une antiparticule (à part le π^0 , le η , le photon et le Z^0 qui sont leur propre antiparticule) qui se désintègre avec le même temps de vie, les mêmes probabilités dans des modes similaires : il suffit de remplacer les particules filles par leurs antiparticules. 115

Chapitre 1

Histoire et zoologie

Objectifs du chapitre. *Le but de ce chapitre introductif est de brosser un rapide panorama des particules élémentaires connues à ce jour. Nous adopterons une approche historique, en montrant comment les particules ont été progressivement découvertes et comprises. À la fin du chapitre, une zoologie complète sera présentée.*

Avertissement. Les physiciens expriment généralement la masse des particules élémentaires en puissances d'électron-Volt en tirant partie de la fameuse équation $E = mc^2$ et en posant que la vitesse de la lumière est égale à 1. Nous précisons cette convention dans l'annexe C. Pour mémoire, $1 \text{ eV}/c^2 \sim 1,8 \times 10^{-36} \text{ kg}$.

1.1 Baryons, mésons et leptons

Alors qu'au début du vingtième siècle, les particules élémentaires étaient les nombreux atomes, nous verrons qu'au début des années 30, le nombre de particules élémentaires était devenu fort raisonnable : protons, neutrons et électrons permettaient de construire tous les atomes du tableau de Mendeleiev. Mais en 1960, terme chronologique de ce paragraphe 1.1, cette simplicité a volé en éclats avec la découverte d'une multitude de nouvelles particules élémentaires que l'on a classées en trois grandes catégories : les baryons, les mésons et les leptons.

1.1.1 Les premières particules élémentaires

Les premières particules élémentaires à avoir été découvertes sont naturellement celles qui constituent la matière qui nous entoure et le rayonnement avec lequel elle interagit.

- En 1897, Thomson constate qu'il y a dans les rayons cathodiques des corpuscules chargés négativement, dont la masse est 2000 fois plus petite que la masse atomique. Il s'agit de **l'électron**, particule considérée aujourd'hui encore comme élémentaire. Sa masse est de $511 \text{ keV}/c^2$. Jusqu'à preuve du contraire, les électrons sont ponctuels. La limite expérimentale sur leur taille est 10^{-18} m .

- En 1911, Rutherford observe un cœur chargé positivement dans les atomes. Il s'agit des noyaux dont la taille est de l'ordre de quelques fermis ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).
- En 1919, le **proton** est observé dans une collision de particules α (des noyaux d'hélium) sur de l'azote $\alpha + N \rightarrow \text{proton} + \text{résidus}$. La masse du proton est de $938,272 \text{ MeV}/c^2$ et sa taille est de l'ordre du fermi.
- De 1905 à 1926, avec l'émergence de la mécanique quantique, on comprend que la lumière revêt des aspects ondulatoires aussi bien que corpusculaires¹. Le corpuscule de lumière est le **photon** et on le note généralement γ . Sa masse est nulle.
- En 1930, Pauli postule qu'il existe une particule neutre, uniquement sensible à l'interaction faible, nécessaire à la conservation de l'énergie de la désintégration β ($n^0 \rightarrow p^+e^-\nu$). Il s'agit du **neutrino** noté ν qui ne sera effectivement observé qu'en 1956.
- En 1932, Chadwick observe des **neutrons**, sous la forme d'un rayonnement pénétrant, neutre, dont la capacité à arracher les protons dans des noyaux est bien plus grande que s'il s'agissait d'un photon. La masse d'un neutron est légèrement supérieure à celle d'un proton : $939,565 \text{ MeV}/c^2$.

Au début des années 30, les particules élémentaires sont donc peu nombreuses. **Cinq particules suffisent** à expliquer toutes les observations d'alors.

- **Protons et neutrons** s'associent pour former les noyaux.
- Avec les **électrons**, ils forment les atomes.
- Tous les rayonnements (visible, ultraviolet et infrarouge, γ et X) sont constitués de **photons** de différentes longueurs d'onde.
- Vient s'ajouter à elles, le **neutrino**, particule neutre et légère émise pendant les désintégrations β .

1.1.2 L'anti-matière

En 1932, Anderson observe dans les rayons cosmiques une particule chargée positivement dont la masse est celle de l'électron. Il s'agit du **positron** – ou positon, les deux orthographes sont autorisées en français – antiparticule de l'électron. En 1927, Dirac avait postulé son existence, en partant de considérations purement théoriques (voir le paragraphe 5.3).

Propriétés d'une particule et de son antiparticule

- même masse m , même durée de vie τ , même spin s ,
- charge électrique opposée $\pm q$,
- tout nombre quantique (autre que le spin) est nécessairement opposé.

L'antiparticule d'une particule q est généralement notée \bar{q} . La principale propriété des antiparticules est de pouvoir annihiler les particules correspondantes en produisant des photons. Inversement, il est possible de créer une paire particule-antiparticule à

1. Pour plus de détails sur les grandes expériences qui exhibent les propriétés duales de la lumière, voir le paragraphe 3.1.

partir de photons.

$$q + \bar{q} \leftrightarrow \gamma + \gamma \quad (1.1)$$

Depuis le positron, de nombreuses autres antiparticules ont été découvertes, comme l'antiproton et l'antineutron en 1955. Des atomes d'antihydrogène (un antiproton et un antiélectron) ont été fabriqués en 1996.

Il est à noter que certaines particules sont leurs propres antiparticules. C'est le cas du photon, mais également d'autres que nous verrons plus loin, comme le π^0 , le η , le ϕ , le boson Z^0 , etc.

1.1.3 Pions et muons

Deux nouvelles particules

En 1937, des physiciens observent dans les rayons cosmiques des particules de masse intermédiaire entre celles de l'électron et du proton et les appellent pour cela des **mésotrons**, terminologie aujourd'hui obsolète. Ces particules existent en deux variétés de charge : +1 et -1 et semblent antiparticules l'une de l'autre.

En 1940, Rossi et ses collaborateurs constatent que ces particules se désintègrent avec une durée de vie de l'ordre de $2 \mu\text{s}$. Il est à noter que les mesures du temps de vie de ces particules, qu'elles soient produites à grande vitesse dans les rayons cosmiques ou au repos dans un laboratoire, ont constitué une des preuves de la relativité restreinte, comme nous le verrons dans le chapitre dédié à cette théorie (paragraphe 2.3.2).

En 1947, Powell et ses collaborateurs observent une chaîne de deux désintégrations successives. On réalise alors qu'il existe en fait deux particules distinctes : le **pion** π et le **muon** μ .

$$\begin{aligned} \pi^\pm &\rightarrow \mu^\pm + \dots \\ \mu^\pm &\rightarrow e^\pm + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Remarque : Les particules notées par des points de suspension et émises lors de ses désintégrations sont invisibles à l'époque. Nous savons aujourd'hui qu'il s'agit de neutrinos.

Propriétés des pions et des muons

La première particule, le pion chargé π^\pm , est sensible à l'interaction forte et possède une masse de $140 \text{ MeV}/c^2$. Elle était attendue car le physicien japonais Yukawa avait prédit l'existence d'une telle particule pour lier les protons et les neutrons entre eux dans les noyaux (voir le paragraphe 5.2.2).

La seconde, le muon μ^\pm est en revanche complètement inattendue. Comme l'électron, elle est insensible à l'interaction forte. Sa masse est de $106 \text{ MeV}/c^2$. C'est elle qu'on a d'abord vue dans les rayons cosmiques et qui possède un temps de vie d'environ $2 \mu\text{s}$. Le pion chargé, quant à lui, a un temps de vie de 20 ns .

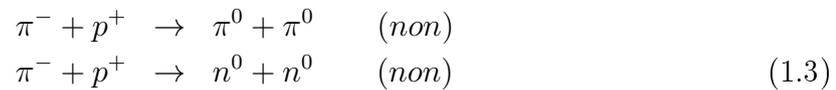
En 1950, au cyclotron de Berkeley, on observe les premiers pions neutres, de masse $135 \text{ MeV}/c^2$, de durée de vie 8.10^{-17} s et se désintégrant en deux photons. Ces π^0 étaient également prédits par Yukawa.

1.1.4 Conservation du nombre baryonique

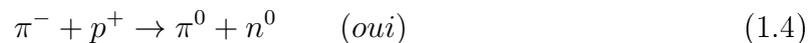
L'observation du comportement de nouvelles particules amène les physiciens à introduire de nouvelles lois de conservations et de nouvelles propriétés.

Au jour de la découverte des pions et des muons, il n'avait pas été observé de désintégrations des particules lourdes (proton, neutron) en particules légères (électron, neutrino). Plus précisément, **le nombre de particules lourdes se conserve** entre les états initial et final d'une réaction, comme lors de la désintégration possible du neutron $n^0 \rightarrow p^+ e^- \nu$, qui ne peut en revanche pas se désintégrer en $e^+ e^-$ par exemple.

La question se pose de savoir ce que devient cette propriété et dans quelle catégorie classer les mésons : lourds ou légers ? L'expérience montre que le nombre de particules lourdes continue de se conserver dès lors qu'on range les mésons dans les particules légères. Par exemple, en faisant interagir un faisceau de π^- sur des cibles de protons, on ne peut jamais obtenir :



mais on obtient en revanche :



Cette propriété est vérifiée par l'ensemble des particules connues aujourd'hui. On leur attribue donc un nouveau nombre quantique : le nombre baryonique B . La conservation du nombre baryonique n'a jamais été mise en défaut. Le test le plus fin de cette conservation est la stabilité du proton, la plus légère des particules lourdes, dont la durée de vie moyenne est au moins supérieure à 10^{31} années.

Trois catégories de particules

Les particules que nous verrons apparaître par la suite se rangeront dans une des catégories suivantes :

- **Les leptons** ($B=0$) insensibles à l'interaction forte : électron, muon, neutrino...
- **Les mésons** ($B=0$) sensibles à l'interaction forte : pions, kaons...
- **Les baryons** ($B=1$) sensibles à l'interaction forte : proton, neutron, hypérons...

Les antibaryons : les antiparticules ayant des nombres quantiques opposés, un baryon possède nécessairement un antibaryon de nombre baryonique : -1 . Les premiers antibaryons, l'antiproton ou de l'antineutron ne furent découverts qu'en 1955 et 1956. Un méson ou un lepton peut également avoir une antiparticule s'il existe un autre nombre quantique non nulle permettant de les distinguer. C'est par exemple le cas de l'électron qui se distingue au moins du positron par sa charge électrique.

Les hadrons : on appelle *hadron* toute particule sensible à l'interaction forte. L'ensemble des hadrons est donc composé des mésons, des baryons et des antibaryons.

1.1.5 Les particules étranges

Les kaons chargés

En 1944, Leprince-Ringuet et Lhéritier aperçoivent dans les rayons cosmiques une particule chargée 990 fois plus lourde que l'électron. En 1951, Fowler et ses collaborateurs obtiennent une confirmation forte de l'existence de cette nouvelle particule et précisent ses propriétés. Sa masse est de $(966 \pm 8) \times m_e$, son temps de vie de 1 ns et elle se désintègre en trois pions chargés $\pi^\pm \pi^+ \pi^-$.

À l'époque, cette particule est appelée le τ . Parallèlement, on observe la désintégration d'une autre particule, nommée le K , en muon accompagné de particules neutres. La mesure des particules neutres étant délicate, on ne peut encore remonter à la masse de la particule mère. En 1954, un autre mode de désintégration est observé : $\pi^+ \pi^0$ et la particule mère est appelée θ .

En 1955, il est établi que les masses de toutes ces particules (K , τ et θ) sont très proches. Finalement, ces modes de désintégration n'appartiennent qu'à une seule et même particule² que l'on nomme le K . Finalement :

$$\begin{aligned} K^+ &\rightarrow \mu^+ \nu && (63, 5\%) \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^0 && (21, 2\%) \\ K^+ &\rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^- && (5, 6\%) \end{aligned} \tag{1.5}$$

L'antiparticule du K^+ , le K^- , fut formellement identifiée à la même époque.

Kaons et Hypérons neutres

En 1947, Rochester et Butler voient des traces en forme de V dans leurs chambres à brouillard, un détecteur qui permet de photographier les trajectoires des particules chargées. Certaines, appelées V^+ , correspondent à la désintégration d'une particule chargée en une particule chargée accompagnée de particule(s) neutre(s), invisible(s) en chambre à brouillard. Il s'agit de pions se désintégrant en muons. Mais d'autres, appelées V^0 , correspondent à une particule neutre se désintégrant en deux particules chargées. Ces événements sont totalement inattendus.

En 1951, Armenteros et ses collaborateurs estiment la masse des V^0 et trouvent deux types d'événements³ :

$$\begin{aligned} \Lambda^0 &\rightarrow p^+ \pi^- && m_\Lambda \simeq 2000 \text{ à } 2500 \times m_e \\ K^0 &\rightarrow \pi^+ \pi^- && m_K \simeq 1000 \times m_e \end{aligned} \tag{1.6}$$

Première particule plus lourde que le proton, le Λ^0 est appelé **hypéron**. Il s'agit d'un baryon alors que le K^0 , dont la masse est proche de celle des kaons chargés, est un méson.

2. L'admission que le θ et le τ ne sont qu'une seule particule se fit au prix de l'abandon de la symétrie \mathcal{P} de parité, comme nous le verrons au paragraphe 4.2.1.

3. La technique expérimentale pour découvrir ces deux particules est proposée en exercice page 110.

L'étrangeté des nouvelles particules

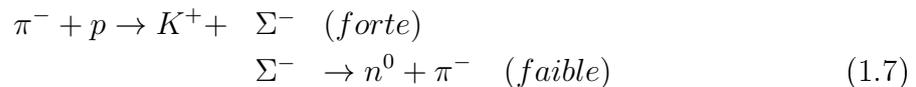
Les nouvelles particules que nous venons de décrire ne sont que les premières venues d'une longue liste qui s'étoffe dans les années 50 :

- En 1952, au cyclotron de Chicago, sont produites des particules dont la durée de vie est si courte qu'on ne les observe que par leur désintégration. Pour cette raison, on les appelle des **résonances**. Elles se comportent comme des baryons et on les connaît aujourd'hui sous le nom de Δ . Les premières observées existent sous quatre variétés de charge : Δ^- , Δ^0 , Δ^+ et Δ^{++} .
- En 1952, un hypéron négatif, le Ξ^- , est vu dans les rayons cosmiques.
- En 1953, de nouvelles particules sont observées dans les rayons cosmiques, les Σ^+ et Σ^- .
- En 1960, la liste des particules élémentaires dépasse la centaine.

L'étude des réactions de production (dans les nouveaux accélérateurs de particules) et de désintégration révèlent que certaines de ces nouvelles particules (comme les kaons, le Λ^0 , les Σ) ont des comportements *étranges* :

- Elles sont toujours produites par paires avec des taux de productions dignes de l'interaction forte (à des échelles de temps de l'ordre de 10^{-23} s).
- Elles ne se désintègrent que par interaction faible, avec des temps de vie de l'ordre de 10^{-10} s.

Par exemple, pour le Σ^- :



D'autres, comme les Δ , peuvent être créées seules et semblent se désintégrer aussi vite qu'elles sont créées, donc par interaction forte :

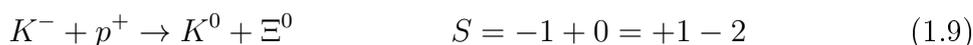


En 1956, Gell-Mann et Nishijima comprennent les règles qui régissent ces nouvelles particules. Ils introduisent un nouveau nombre quantique, **l'étrangeté S**, attribuent des valeurs d'étrangeté aux particules connues et donnent les règles de conservation :

- Les nucléons, les pions et les leptons n'ont pas d'étrangeté ($S=0$), de même que les résonances Δ .
- **L'interaction forte conserve l'étrangeté**, ce qui explique que les particules étranges sont produites par paire d'étrangetés opposées.
- **L'interaction faible ne conserve pas nécessairement l'étrangeté**. Ceci explique le temps de vie long des mésons et des baryons étranges (kaons et hyperons). Ils ne peuvent en effet pas se désintégrer sans violer la conservation de l'étrangeté puisqu'il n'existe pas de mésons/baryons étranges plus légers qu'eux. Puisque c'est impossible par interaction forte, ils ne peuvent se désintégrer que par interaction faible.
- Si on en croit cette dernière propriété, des mésons/baryons étranges plus lourds devraient pouvoir se désintégrer par interaction forte en mésons/baryons étranges plus légers. Ces particules, des résonances puisqu'elles peuvent se désintégrer extrêmement rapidement, seront en effet observées dans les accélérateurs : Σ^* , Ξ^* ...

Reste à attribuer des valeurs d'étrangeté à toutes les particules observées. Le tableau 1.1 résume les valeurs qui permettent d'expliquer toutes les réactions/désintégrations observées.

Ces règles, qui fonctionnent dans la plupart des réactions vues à l'époque, permirent également d'en compléter certaines. Des particules neutres, qui ne se voyaient pas dans les détecteurs d'alors devaient exister pour équilibrer les réactions et conserver l'étrangeté. Le Σ^0 ($S = -1$) et le Ξ^0 ($S = -2$) furent ainsi prédits et rapidement observés. Le Ξ^0 par exemple, manquait pour expliquer la production de K^0 ($S = +1$) sur un faisceau de K^- ($S = -1$) :



Masse (MeV/c ²)	Charge électrique				Étrangeté
	-1	0	+1	+2	
Les baryons (nombre baryonique = 1)					
1530	Ξ^{*-}	Ξ^{*0}			-2
1385	Σ^{*-}	Σ^{*0}	Σ^{*+}		-1
1300	Ξ^-	Ξ^0			-2
1232	Δ^-	Δ^0	Δ^+	Δ^{++}	0
1190	Σ^-	Σ^0	Σ^+		-1
1115		Λ^0			-1
939		n	p		0
Les mésons (nombre baryonique = 0)					
547		η			0
495	K^-	\bar{K}^0			-1
495		K^0	K^+		+1
140	π^-	π^0	π^+		0
Les leptons (nombre baryonique = 0)					
106	μ^-		μ^+		0
0,511	e^-		e^+		0
0		ν			0

TABLE 1.1 – Les particules découvertes au début des années 60. Les antibaryons n'ont pas été portés, mais possèdent la même masse que leur baryon associé, mais une charge et une étrangeté S opposées. Les particules sur une même ligne n'ont pas rigoureusement la même masse, sauf quand elles sont antiparticules l'une de l'autre (e^+/e^- , μ^+/μ^- , π^+/π^- , K^+/K^- , K^0/\bar{K}^0). Dans les autres cas les différences sont de l'ordre du MeV/c², petites devant les différences entre lignes du tableau.

1.1.6 Résumé de la situation au début des années 60

Comme nous l'avons vu, les années 50 voient une prolifération de nouvelles particules (résumées dans le tableau 1.1). Trois lois de conservation semblent régir leurs

interactions :

- **Conservation de la charge électrique** q dans toutes les interactions.
- **Conservation du nombre baryonique** B dans toutes les interactions.
- **Conservation de l'étrangeté** S dans toutes les interactions, sauf l'interaction faible.

Par exemple, les réactions suivantes sont impossibles :

$$\pi^- + p^+ \rightarrow K^+ + K^- \quad (\text{Violation de } B) \quad (1.10)$$

$$\pi^- + p^+ \rightarrow n^0 + K^0 \quad (\text{Violation de } S) \quad (1.11)$$

Exercice : Essayer de terminer les réactions suivantes, en tâchant de trouver la solution ayant le plus petit nombre de particules :

$$p^+ + p^+ \rightarrow K^+ + \dots$$

$$\pi^- + p^+ \rightarrow K^0 + \dots$$

$$K^- + p^+ \rightarrow \pi^+ + \dots$$

1.2 Quarks et leptons

Les années 60 voient une avancée significative dans la compréhension de la structure intime de la matière. Les physiciens comprennent alors que la multitude des nouvelles particules observées reposent en fait sur quelques briques élémentaires simples : les quarks. Du côté des leptons, l'observation de plusieurs types de neutrinos laisse également deviner un ordre simple et systématique.

1.2.1 Découverte des quarks

Rangement dans des multiplets

En 1964, Gell-Mann, encore lui, comprend qu'il existe un ordre sous-jacent sous l'apparente anarchie du tableau 1.1. Il range les hadrons en fonction de leur nombre quantique : la charge électrique q et l'étrangeté S , ainsi que leur spin et leur nature baryonique ou mésonique. Les figures 1.1, 1.2 et 1.3 résument ce classement.

Les nombres quantiques utilisés sur ces figures sont des combinaisons de l'étrangeté S , du nombre baryonique B et de la charge électrique Q , et sont donc conservés par les mêmes interactions que ceux-ci :

- **L'hypercharge** $Y = B + S$.

- **L'isospin** $I_3 = Q - \frac{Y}{2}$.

Notez que les lignes de ces figures correspondent aux lignes de notre tableau 1.1 et donc à des particules ayant essentiellement la même masse.

Une symétrie sous-jacente

Un expert de la théorie des groupes comme Gell-Mann reconnaît là des représentations d'un groupe de symétrie, d'une algèbre de Lie associée au groupe $SU(3)$ des

matrices spéciales unitaires de dimension 3.

Il sort du cadre de ce cours d'étudier dans le détail la théorie des groupes, mais nous allons résumer les idées clefs qui ressortent de la découverte de cette symétrie sous-jacente.

- Il est possible d'engendrer les hadrons à partir d'un objet élémentaire, l'objet le plus simple possédant la symétrie qui apparaît sur les multiplets. Cet objet fondamental est un triplet et possède donc trois composantes. Appelons-le T .
- Le triplet T est composé de trois points élémentaires dont les nombres quantiques d'isospin et d'étrangeté sont $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(+\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, -1)$. L'anti-objet \bar{T} à des nombres quantiques opposés, soient $(+\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, +1)$.
- Il est possible de construire les baryons en composant trois triplets élémentaires T , et les mésons en composant⁴ un triplet avec un anti-triplet.

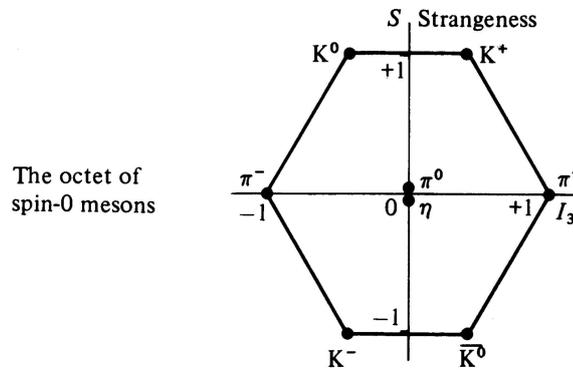


FIGURE 1.1 – Octet mésonique dans le plan étrangeté/isospin.

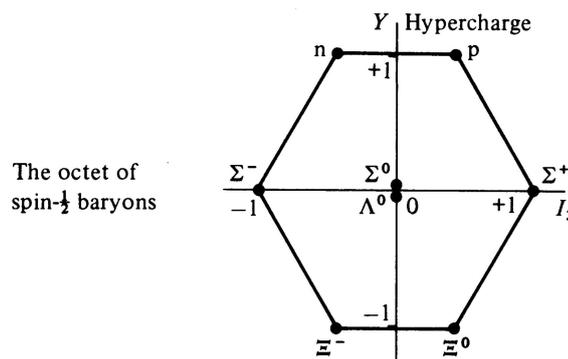


FIGURE 1.2 – Octet baryonique dans le plan hypercharge/isospin.

4. Cette composition est tout à fait similaire à celle que l'on emploie pour composer le spin des particules.

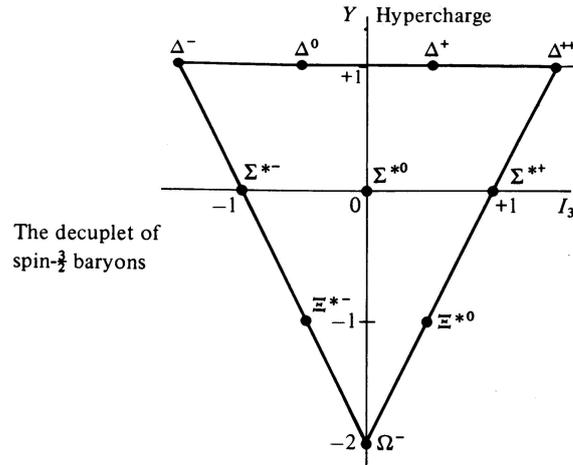


FIGURE 1.3 – Décuplet baryonique dans le plan hypercharge/isospin.

Trois quarks dans les hadrons

Les conclusions que Gell-Mann⁵ tire de ce classement sont :

- **Il existe des particules plus élémentaires que les hadrons.** Gell-Mann les baptise **quarks**⁶.
- **Les baryons sont composés de trois quarks.**
- **Les mésons sont composés d'un quark et d'un antiquark.**

Ces trois quarks sont appelés *up*, *down* et *strange* et doivent avoir les nombres quantiques portés au tableau 1.2 pour former convenablement les hadrons connus. Ils ont en particulier une charge fractionnaire de la charge élémentaire.

Quark	Q	I_3	S	B
Up	$+2/3$	$+1/2$	0	$+1/3$
Down	$-1/3$	$-1/2$	0	$+1/3$
Strange	$-1/3$	0	-1	$+1/3$

TABLE 1.2 – Les trois premiers quarks et leurs nombres quantiques. Les antiquarks ont des nombres quantiques opposés.

L'étrangeté est portée par le seul quark étrange. La convention arbitraire choisie au moment de l'introduction du concept d'étrangeté est telle qu'un quark étrange porte une unité d'étrangeté négative ($S = -1$).

5. Il fallut du temps pour que les physiciens se convainquent que les hadrons étaient effectivement composites. Au départ, Gell-Mann le premier considérait les quarks comme un artifice mathématique.

6. d'après le vers mystérieux du poème *Finnegan's Wake* de James Joyce : *Three quarks for Muster Mark*.

Révisions des multiplets

Les figures 1.4, 1.5 et 1.6 revisitent les multiplets en terme des trois quarks élémentaires. En regardant la correspondance entre les figures 1.2 et 1.5, on voit par exemple que nos protons sont composés des quarks uud et que nos neutrons sont composés de udd .

Une prédiction

Lorsque Gell-Mann comprend le classement des hadrons, l'un d'entre eux n'a pas encore été observé : le Ω^- , porteur d'une étrangeté -3 . Gell-Mann prédit alors son existence et sa masse (les différences de masse entre lignes de la figure 1.3 semblent constantes). Le Ω^- est alors recherché et immédiatement découvert. Il s'agit du premier succès du modèle des quarks.

Deux problèmes

Un premier problème (de taille !) du modèle des quarks de Gell-Mann est que les quarks n'ont alors pas été observés ! Il faudra attendre 1969 pour qu'on détecte des constituants à l'intérieur des protons et que l'idée de l'existence des quarks soit acceptée. Néanmoins, il est, aujourd'hui encore, impossible de voir des quarks isolés. Ils ont horreur de la solitude et n'existent qu'à l'intérieur des hadrons. Il s'agit là d'une des propriétés essentielles de l'interaction forte.

Le second problème réside dans le fait qu'on n'observe pas de hadrons composés de deux quarks, ou de deux quarks et d'un antiquark. Les seuls états observés⁷ sont les baryons $q_1q_2q_3$, les mésons $q_1\bar{q}_2$ et les antibaryons $\bar{q}_1\bar{q}_2\bar{q}_3$.

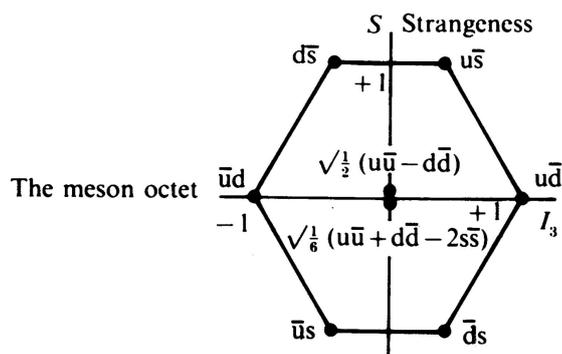


FIGURE 1.4 – Octet mésonique en terme de quarks.

Ces deux problèmes trouvent leur réponse dans la structure de l'interaction forte qui lie les quarks à l'intérieur des hadrons. Ce point dépasse le cadre de ce cours.

7. Depuis 2003, des physiciens affirment avoir observé une nouvelle race de particules, les **penta-quarks** composés de quatre quarks et d'un antiquark et prédits par la théorie de l'interaction forte. Cette découverte n'est cependant toujours pas confirmée.

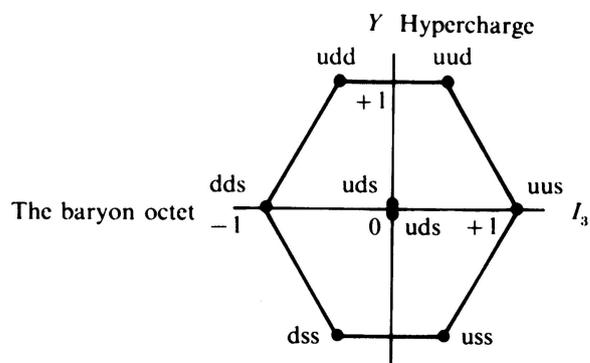


FIGURE 1.5 – Octet baryonique en terme de quarks.

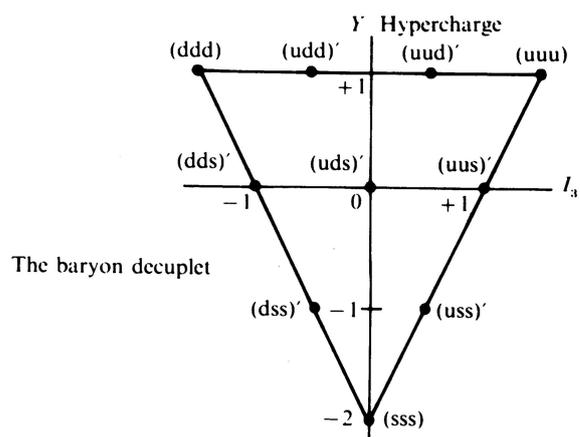
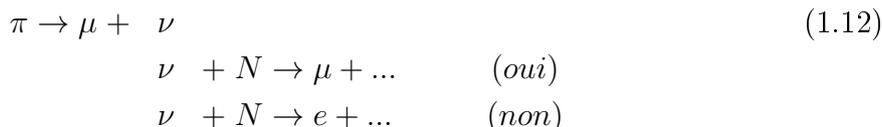


FIGURE 1.6 – Décuplet baryonique en terme de quarks.

1.2.2 Les leptons

Du côté des leptons, des avancées significatives sont faites avec l'observation des neutrinos en 1956. En 1962, Lederman, Schwartz et Steinberger réalisent qu'il existe en fait deux types de neutrinos, et que ceux-ci vont de paires avec les leptons lourds : l'électron et le muon.

En effet, ils observent que les neutrinos issus de la désintégration d'un pion en muon sont capables de ré-interagir sur des noyaux pour donner des muons, et pas des électrons :



Le neutrino qui apparaît dans ces équations est donc nécessairement lié au muon et on l'appelle **neutrino muonique**. Il est a priori différent du **neutrino électronique** qui apparaît par exemple dans les réactions de capture électronique $e^- + p^+ \rightarrow n^0 + \nu_e$.

Conservation des nombres leptoniques

L'observation des réactions faisant intervenir des leptons amène à introduire de nouveaux nombres quantiques, indépendamment conservés.

- L'électron et le neutrino électronique sont les seules particules à partager un **nombre leptonique électronique**, qui se conserve. Leurs antiparticules sont forcément de nombre quantique opposé. Ceci justifie en particulier que lors de la désintégration β , il faille nécessairement émettre un antineutrino. $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$. Le fait que ce soit un antineutrino a été vérifié expérimentalement, les neutrinos produits par une centrale nucléaire sont en effet susceptible d'interagir avec la matière et de créer des positrons : $\bar{\nu}_e + N \rightarrow e^+ + \dots$ et non des électrons.
- De même, le muon et le neutrino muonique partagent un nombre leptonique muonique. Ceci est par exemple nécessaire pour justifier le fait qu'un π^0 ne se désintègre pas en muon + positron.

Lepton	Q	N_e	N_μ
Électron e^-	-1	+1	0
Neutrino ν_e	0	+1	0
Muon μ^-	-1	0	+1
Neutrino ν_μ	0	0	+1

TABLE 1.3 – Les leptons et leurs nombres quantiques. Les anti-leptons ont des nombres opposés.

Exercice : Compléter les réactions 1.2 de désintégration des pions et des muons.

Exercice : Dans une collision e^+e^- est-il possible d'observer un μ^+ et un e^- ?

Solution : Oui, les nombres leptoniques initiaux sont nuls, donc les nombres leptoniques finals doivent l'être aussi. Il suffit de contrebalancer l'électron et le muon produits par des neutrinos : $e^+e^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \mu^+ \nu_\mu$. Néanmoins, ce processus mettant en jeu beaucoup de particules, il est beaucoup plus rare que les processus simples : $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ ou $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

1.2.3 Le quatrième quark

En 1964, les physiciens commencent à ressentir le besoin de l'existence d'un quatrième quark. Très prosaïquement, il s'agit simplement de remplir le trou du tableau 1.4.

Plus sérieusement, en 1970, des calculs montrent que chaque quark de charge $-\frac{1}{3}$ doit être contrebalancé par un quark de charge $+\frac{2}{3}$ pour que certains processus restent calculables dans la théorie de l'électrodynamique quantique.

Les physiciens d'alors appellent l'hypothétique quark le *charm* car son existence préserve le charme de la théorie, et qu'il apparaît comme par magie – *charm* signifie sortilège en anglais – pour combler ce trou dans le tableau.

Lepton	Neutrino	Quark $+2/3$	Quark $-1/3$
Électron	ν_e	<i>up</i>	<i>down</i>
Muon μ^-	ν_μ	?	<i>strange</i>

TABLE 1.4 – Les particules élémentaires de 1964 et l'intuition de l'existence d'un quatrième quark.

En 1974, la première particule *charmée* (contenant des quarks *charm*) est découverte indépendamment par deux équipes. Les deux patrons des expériences, Richter et Ting, obtiennent le prix Nobel en 1976. La nouvelle particule est baptisée en condensant le nom que chaque équipe lui a donné : J/ψ . Sa masse vaut environ trois fois celle du proton $m_{J/\psi} = 3105 \text{ MeV}/c^2$. Il s'agit néanmoins d'un méson, composé d'une paire charm/anticharm, ce qui semble indiquer que le quark *charm* est bien plus lourd que ses camarades.

Anecdote : les articles de ces deux expériences ont été soumis les 8 et 9 novembre 1974 et leurs premiers signataires sont – ordre alphabétique oblige – français. L'un d'eux est même centralien...

Des tas de hadrons charmés : dès lors, toute une nouvelle zoologie de particules est prédite, et observée de nos jours. Les figures 1.7 et 1.8 résument les nouveaux multiplets mésoniques et baryoniques que l'on peut fabriquer à l'aide des quatre quarks et de la symétrie $SU(4)$. Dans le plan où le *charm* est absent, on reconnaît les multiplets des figures 1.4, 1.5 et 1.6.

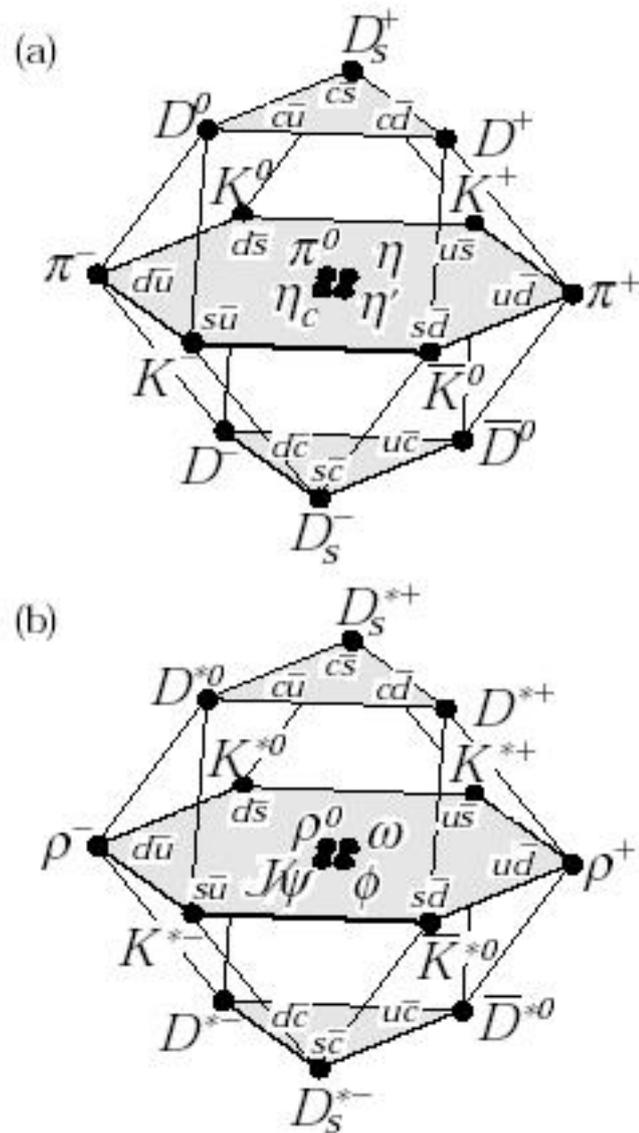


FIGURE 1.7 – Multiplets mésoniques fabriqués avec quatre quarks.

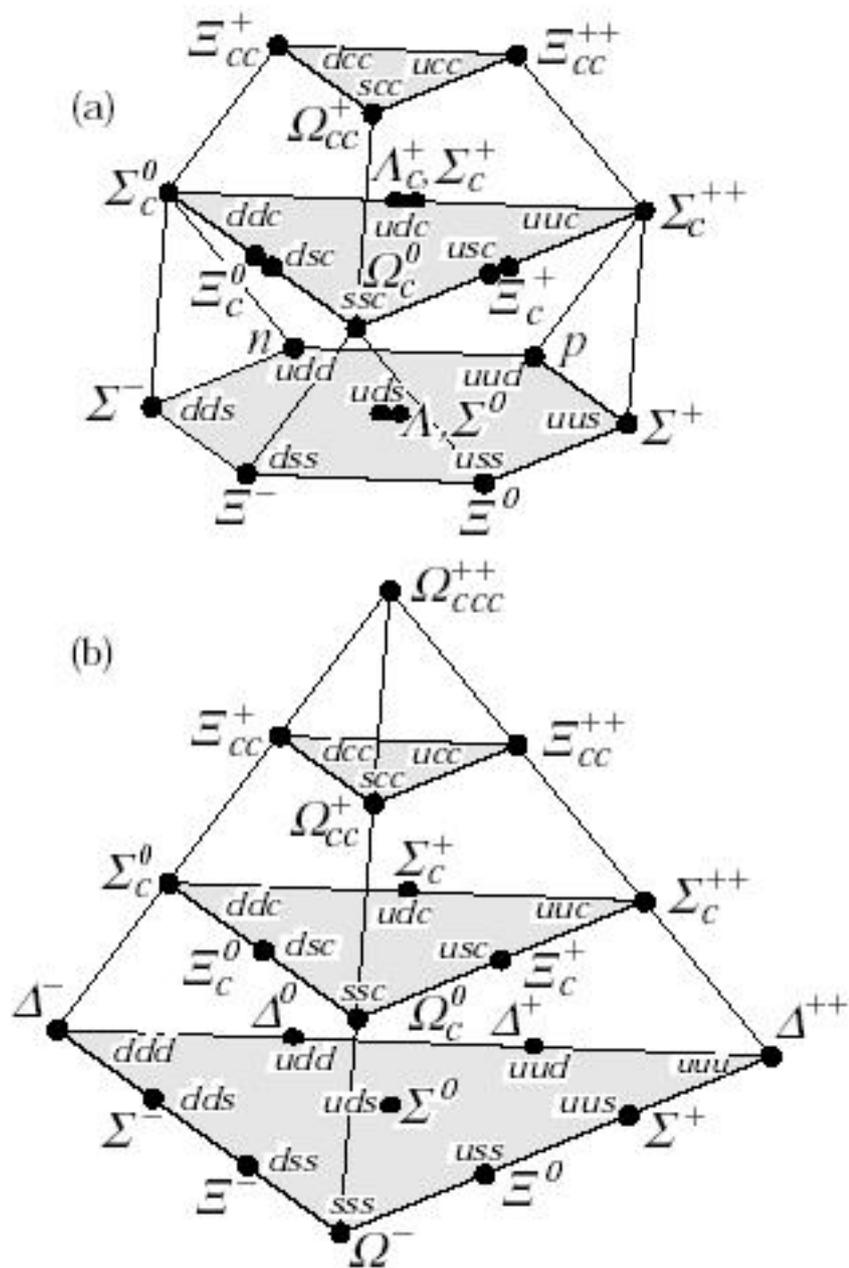


FIGURE 1.8 – Multiplets baryoniques fabriqués avec quatre quarks.

1.2.4 La troisième famille

L'histoire s'arrête-t-elle là ? Non, l'expérience a montré qu'il existait une troisième famille de particules.

- En 1975, Perl découvre un nouveau lepton qu'il baptise τ . Sa masse est $1777 \text{ MeV}/c^2$, un sacré grand frère pour l'électron et le muon. Perl cherchait si les nombres leptoniques n'étaient pas violés à haute énergie. Il cherchait des événements du type $e^+e^- \rightarrow \mu^+e^-$ dont nous avons vu dans le dernier exercice qu'ils devaient être rares. Or, Perl en voit beaucoup plus que prévu. La seule explication possible est qu'ils transitent par un nouveau lepton :

$$\begin{aligned} e^+e^- &\rightarrow \tau^+\tau^- & (1.13) \\ \tau^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau \\ \tau^- &\rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \end{aligned}$$

Comme l'électron et le muon, le tau a son neutrino associé et un **nombre leptonique tauique conservé**.

- En 1977, un cinquième quark est découvert, le *bottom*, de charge $-\frac{1}{3}$ que les poètes appellent souvent le quark beau. Pour les mêmes raisons qu'on attendait le quark *charm*, il doit exister un troisième quark de charge $+\frac{2}{3}$.
- Il est découvert en 1995 et baptisé le quark *top*.
- Le neutrino ν_τ associé au lepton τ n'est directement observé qu'en 2000, mais la troisième famille est aujourd'hui bouclée.

Type	Charge	Famille 1	Famille 2	Famille 3
Lepton	-1	Électron 0,511	Muon 105,6	Tau 1 777
Neutrino	0	ν_e < $3 \cdot 10^{-6}$	ν_μ < 0,19	ν_τ < 1, 2
Quark up	+2/3	<i>up</i> 1,5 à 4,5	<i>charm</i> 1000 à 1400	<i>top</i> 174 000
Quark down	-1/3	<i>down</i> 5 à 8,5	<i>strange</i> 80 à 155	<i>beauty</i> 4100 à 4400

TABLE 1.5 – Les particules de matière connues aujourd'hui, ainsi que leur masse en MeV/c^2 . À chacune de ces particules correspond une antiparticule de même masse, mais de charge opposée.

Est-ce tout ?

Existe-t-il encore d'autres quarks et d'autres leptons ? Il semble que non car on sait aujourd'hui qu'il n'existe que trois types de neutrinos légers (de masse inférieure à $45 \text{ GeV}/c^2$)⁸.

8. Ce sont les désintégrations du boson Z^0 , particule responsable de l'interaction faible susceptible de se désintégrer dans tout type de neutrino, qui nous informent de cette limitation.

Néanmoins, nous devons rester prudents. S'il n'existe pas de quatrième neutrino, il n'existe *a priori* pas de quatrième lepton chargé. Mais rien dans la théorie ne relie les quarks aux leptons et il n'est pas *a priori* impossible qu'il existe une quatrième famille de quarks. De plus, la récente découverte que les neutrinos ont des masses, certes petites, n'interdit pas forcément l'existence d'un quatrième neutrino beaucoup plus massif.

1.3 Un mot des interactions

Depuis le début de notre exposé historique, nous avons passé un point sous silence. Il est aujourd'hui établi que les particules interagissent entre elles en échangeant d'autres particules. Nous développerons ce point au paragraphe 5.2. Il existe ainsi d'autres particules que celles, dites de *matière*, du tableau 1.5. Le seul rôle de ces nouvelles particules est de relier les particules de matière unes aux autres.

Les interactions fondamentales connues aujourd'hui sont au nombre de quatre :

- **La gravitation**, bien connue depuis Newton (1685) et aujourd'hui décrite par la relativité générale d'Einstein (1916). Elle agit **proportionnellement à la masse des objets**, mais reste **inaccessible à l'expérience microscopique** tant son intensité est faible pour des particules élémentaires.
- **L'interaction électromagnétique**, bien connue depuis Maxwell (1873) et décrite aujourd'hui par la théorie de l'**électrodynamique quantique** (Dirac en 1927, prix Nobel 1933, puis Feynman, Schwinger et Tomonaga dans les années 50, prix Nobel 1965, ainsi que quelques autres). Elle agit sur **les particules chargées**.
- **L'interaction forte**, responsable de la cohésion des protons et des neutrons à l'intérieur des noyaux, mais aussi des **quarks** à l'intérieur des **hadrons**. Les leptons n'y sont pas soumis. Elle est décrite par la théorie de la **chromodynamique quantique** qui fut formulée dans les années 70 et s'est vue décerner le prix Nobel en 2004 (Gross, Politzer, Wilczek).
- **L'interaction faible**, responsable de certains processus de désintégration comme la désintégration β , observée pour la première fois par Becquerel (1896). D'abord décrite par la théorie de Fermi (1933, prix Nobel 1938), elle est aujourd'hui décrite par la **théorie électrofaible** qui a vu le jour en 1973 (Glashow, Weinberg et Salam prix Nobel 1979, 't Hooft et Veltman prix Nobel 1999, et d'autres).

Par souci de complétude, nous donnons dans le tableau 1.6 les particules responsables de ces interactions. Elles sont toutes des bosons – leur spin est entier – et sont généralement dénommées **bosons médiateurs**. S'il sort du cadre de ce cours d'étudier dans le détail les mécanismes qui les régissent, il est toutefois possible d'aller un peu plus loin.

1.3.1 Le vertex élémentaire électromagnétique

Les équations complexes de théorie quantique des champs furent schématisées par Feynman. Ses diagrammes reflètent graphiquement des équations complexes qui permettent de prédire précisément les interactions entre particules. Nous n'avons d'autre prétention ici que de donner cet aperçu graphique, sans rentrer dans aucune équation.

Interaction	Portée	Intensité	Médiateur(s)	Charge	Spin	Masse
Électromagnétique	Infinie	1	Photon	0	1	0
Forte	10^{-15} m	60	8 gluons	0	1	0
Faible	10^{-17} m	10^{-4}	W^\pm Z^0	± 1 0	1 1	80 GeV/c ² 91 GeV/c ²
Gravitationnelle	Infinie	10^{-41}	Graviton ?	0	2	0

TABLE 1.6 – Les interactions fondamentales et leurs bosons médiateurs. Les intensités relatives sont celles qui s'exercent sur deux quarks *up* distants de $3 \cdot 10^{-17}$ m, l'interaction électromagnétique étant arbitrairement prise comme référence.

La figure 1.9.1 représente le processus élémentaire régissant tout l'électromagnétisme. Trois *particules* se rencontrent en un point d'espace-temps, appelé *vertex* et peuvent se transformer les unes dans les autres. La nature des particules et de la réaction dépend de la manière dont on oriente le temps. La ligne pleine et fléchée représente une particule chargée quelconque. Si la flèche est dans le sens de l'écoulement du temps, il s'agit, par convention, d'une particule (électron, quark...) Si la flèche est en sens inverse, il s'agit de l'antiparticule associée (positron, antiquark...) La ligne pointillée représente un photon. Elle n'a pas besoin d'être orientée car le photon est sa propre anti-particule.

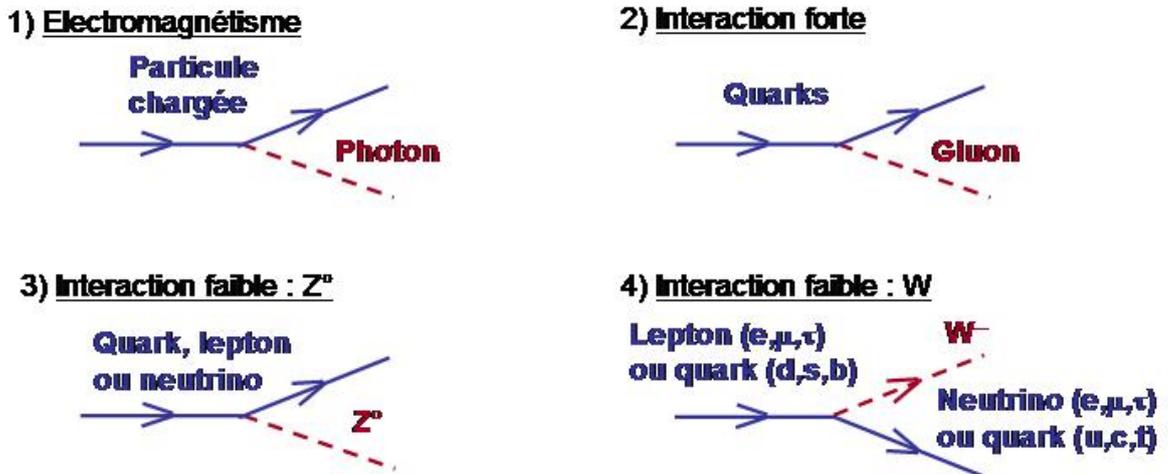


FIGURE 1.9 – Les vertex élémentaires des interactions fondamentales. N'ont pas été représentés les vertex d'interaction des bosons médiateurs entre eux.

Ainsi, à partir du seul vertex élémentaire, on peut rendre compte des phénomènes suivants :

- Figure 1.10.1 : Émission d'un photon par une particule chargée comme l'électron (rayonnement synchrotron).

- Figure 1.10.2 : Émission d'un photon par l'antiparticule associée.
- Figure 1.10.3 : Création d'une paire particule-antiparticule. En renversant le sens du temps : annihilation d'une paire particule-antiparticule.
- Figure 1.10.4 : En connectant deux vertex élémentaires entre eux, on obtient la force de répulsion ou d'attraction électromagnétique. Sur ce diagramme spatial, la nature de la particule dépend du sens du mouvement. Si la particule du haut va de gauche à droite et celle du bas de droite à gauche, il s'agit des particules (et non des antiparticules) et ce diagramme correspond à la répulsion électromagnétique.

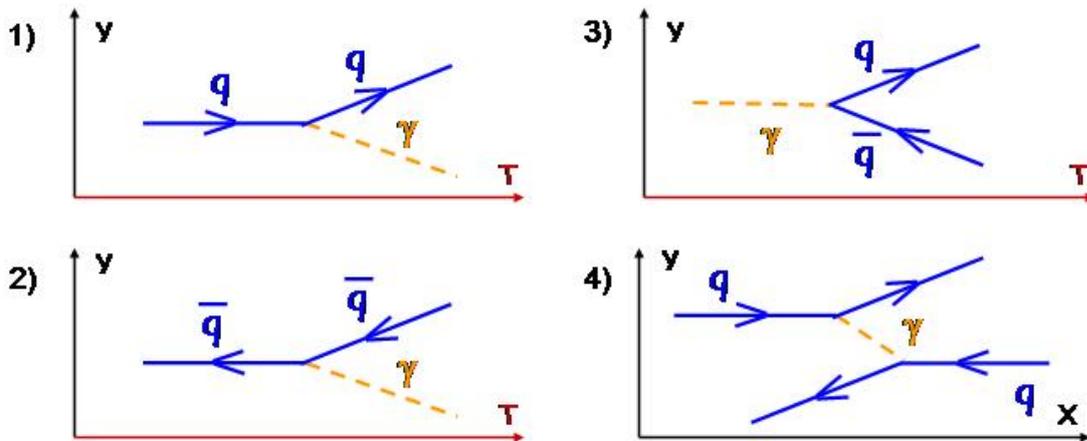


FIGURE 1.10 – Différentes interprétations du vertex électromagnétique, selon son positionnement par rapport au sens d'écoulement du temps.

Ce vertex élémentaire, assorti d'un arsenal physique et mathématique conséquent (théorie quantique des champs, diagrammes de Feynman, renormalisation, etc.) permet de calculer et de prédire de nombreuses propriétés (probabilités d'interaction et distributions des particules finales dans l'espace, c'est-à-dire les sections efficaces que nous verrons au paragraphe 2.5.2) pour de nombreux phénomènes observés, à commencer par l'interaction électromagnétique usuelle. C'est aujourd'hui la théorie physique qui a été vérifiée avec le plus de précision. Certaines mesures et prédictions se comparent à mieux que dix chiffres significatifs.

1.3.2 Interactions forte et faible

Pour les autres interactions, la situation est assez similaire, bien que techniquement plus complexe.

Pour l'interaction forte, le photon est remplacé par le gluon, et les flèches ne peuvent représenter **que des quarks**. Ainsi un gluon peut se transformer en un quark et

son antiquark. Ou encore, un quark peut émettre un gluon. Il existe également d'autres diagrammes qui couplent des gluons entre eux à un même vertex – alors que les photons ne se couplent pas entre eux, à moins de former une boucle particule-antiparticule – et qui sont responsables de leur confinement au sein des hadrons.

Pour l'interaction faible, il existe deux types de médiateurs.

- **Le Z^0** pour lequel le vertex a la même structure que le vertex électromagnétique, à ceci près que toutes les particules peuvent figurer sur les flèches (quarks, leptons et même neutrinos).
- **Le W^+ et le W^- ,** anti-particules respectives, pour lesquelles le vertex est sensiblement différent des précédents, ne serait-ce qu'à cause de la charge des W . La branche du W a un sens et le fait que ce soit un W^+ ou un W^- dépend du sens d'écoulement du temps. Dans la convention de la figure 1.9.4, la particule est le W^- et l'antiparticule est le W^+ . De plus, ne serait-ce que pour respecter la conservation de la charge électrique, le W se couple nécessairement avec des particules différentes ayant une différence de charge d'une unité. Expérimentalement, il y a deux possibilités :
 - soit une paire (lepton, neutrino associé), c'est-à-dire soit (e, ν_e) , soit (μ, ν_μ) , soit (τ, ν_τ) . Noter que ceci se traduit par la conservation des trois nombres leptoniques que nous avons précédemment évoqués (paragraphe 1.2.2).
 - soit une paire (quark de charge $+2/3$, quark de charge $-1/3$). Il est à noter que les paires de quarks ne sont pas nécessairement celles qui apparaissent dans les colonnes du tableau 1.5. Autrement dit, le W ne se couple pas nécessairement aux quarks d'une même famille. Il existe des probabilités non nulles que chaque quark apparaisse avec chaque autre quark, dès l'instant que leurs charges sont bien $(+2/3, -1/3)$. Expérimentalement, les probabilités de couplage des quarks de même famille sont tout de même plus grandes que les probabilités de couplages extra-familiaux. Par exemple, un *top* se couplera essentiellement au *bottom*, mais aussi, dans une moindre mesure, au *strange* et au *down*.

Les W , et donc l'interaction faible, sont les seuls à pouvoir changer la nature des particules (en dehors de l'annihilation particule-antiparticule). C'est cette raison profonde qui fait que l'interaction faible ne respecte pas l'étrangeté (souvenons-nous du paragraphe 1.1.5). Elle est en effet capable de transformer un quark étrange, par exemple en quark *up*.

Sans oublier d'interpréter le sens des flèches pour les trois particules mises en jeu – un bon moyen de ne pas se tromper est de vérifier la conservation de la charge électrique – voici quelques possibilités d'interprétation du vertex élémentaire avec W :

$$W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e \quad (1.14)$$

$$W^- \rightarrow s + \bar{c} \quad (1.15)$$

$$W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e \quad (1.16)$$

$$W^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu \quad (1.17)$$

$$W^+ \rightarrow e^+ + \nu_\mu \quad (\textit{impossible}) \quad (1.18)$$

$$t \rightarrow W^+ + b \quad (1.19)$$

$$t \rightarrow W^+ + s \quad (\text{possible mais plus rare}) \quad (1.20)$$

$$d \rightarrow W^- + u \quad (1.21)$$

$$\bar{u} + d \rightarrow W^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (1.22)$$

1.3.3 De l'intérêt des vertex

Même sans savoir les manipuler mathématiquement, connaître ces vertex permet de comprendre la plupart des processus rencontrés en physique des particules :

- La **désintégration du neutron** ($n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$), responsable de la radioactivité β , se comprend comme la transformation d'un quark d en quark u par émission d'un W^- (réaction 1.21) qui à son tour se désintègre en électron et anti-neutrino (réaction 1.14).
- La désintégration d'un pion négatif en muon et anti-neutrino associé s'explique par la séquence 1.22.
- Un quark top, peut se désintégrer suivant les réactions 1.19 ou 1.20, le quark b ou s émis initie un jet de particules hadroniques, alors que le W^+ peut par exemple donner un lepton et son neutrino associé (réactions 1.16 ou 1.17).

Énergie, impulsion, charge électrique et spin se conservent au vertex!

Nous verrons au paragraphe 5.2.5 que cette nécessité entraîne un comportement étrange pour les particules intermédiaires (telle que le photon de la figure 1.10.4) : pendant le temps éphémère de leur existence, elles n'ont pas nécessairement leur masse habituelle. En revanche, les particules qui proviennent de l'état initial ou existent dans l'état final ont bien une masse définie.

Remarque gravitationnelle : Notez que l'hypothétique **graviton** n'a pas été observé, mais la forme des équations de la relativité générale laisse supposer que s'il existe, il est de spin 2 et de masse et de charge nulles.

Conclusion : Les tableaux 1.5 et 1.6 contiennent et résument toutes les particules qui ont été observées aujourd'hui, dans leur degré d'éléментарité le plus élevé. La seule qui n'ait pas encore été vue est le graviton. En fait, il manque encore une particule à nos tableaux. Le modèle dit *standard*, qui explique remarquablement bien comment toutes ces particules interagissent entre elles, ne saurait exister sans une autre particule, qui seule serait susceptible de donner leur masse à toutes les autres particules. Cette particule mystérieuse est connue sous le nom de **boson de Higgs** et est aujourd'hui activement recherchée par une grande partie de la communauté des physiciens des particules.

Chapitre 2

Relativité restreinte

Objectifs du chapitre. *Nous commençons par un rappel historique de l'émergence des concepts de relativité, de la révolution copernicienne à la théorie d'Einstein. Nous dérivons ensuite les propriétés fondamentales de la relativité restreinte (relativité de la notion de simultanéité, cône de lumière, dilatation du temps, contraction des longueurs) à partir d'arguments purement géométriques. Dans un second temps, nous exposons, par une approche plus formelle, les bases de la cinématique et de la dynamique relativistes, et passons en revue quelques-unes de leurs propriétés, en mettant l'accent sur les applications à la physique des particules.*

2.1 Les origines de la théorie de la relativité

2.1.1 Relativité galiléenne : relativité de l'espace

On doit à Galilée le premier énoncé précis du concept de relativité de l'espace. Dans son *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde* (1632), il défend la description copernicienne (héliocentrique) du système solaire contre la description ptoléméenne (géocentrique) acceptée par l'église catholique du 17^e siècle. Dans un célèbre passage, il montre que les lois de la physique dans deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre sont identiques¹ :

« Enfermez-vous avec un ami dans la plus grande cabine sous le pont d'un grand navire et prenez avec vous des mouches, des papillons et d'autres petites bêtes qui volent ; munissez-vous aussi d'un grand récipient rempli d'eau avec de petits poissons [...]. Quand le navire est immobile, observez soigneusement comme les petites bêtes qui volent vont à la même vitesse dans toutes les directions de la cabine, on voit les poissons nager indifféremment de tous les côtés [...]. Quand vous aurez soigneusement observé cela, bien qu'il ne fasse aucun doute que les choses doivent se passer ainsi quand le navire est immobile, faites aller le navire à la vitesse que vous voulez ; pourvu que le mouvement soit uniforme, sans balancement dans un sens ou l'autre, vous ne remarquez pas le moindre changement dans tous les effets qu'on vient d'indiquer ; aucun ne vous

1. Galileo Galilei, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, Trad. R. Fréreau et F. De Gandt.

permettra de vous rendre compte si le navire est en marche ou immobile : en sautant, vous franchirez sur le plancher les mêmes distances qu'auparavant, et ce n'est pas parce que le navire ira très vite que vous ferez de plus grands sauts vers la poupe que vers la proue ; pourtant, pendant le temps où vous êtes en l'air, le plancher au-dessous de vous court dans la direction opposée à votre saut [...]. »

Autrement dit, la notion de vitesse absolue est sans fondement, puisqu'aucune expérience n'est capable d'en rendre compte (et en particulier, rien ne permet d'affirmer que la Terre est immobile). Ce principe de relativité se traduit en mécanique newtonienne par l'invariance des équations de la dynamique par changement d'un référentiel inertiel à un autre. Les deux lois de Newton sont :

- Première loi : dans un référentiel inertiel et en l'absence de force $\vec{v} = C\vec{t}e$;
- Deuxième loi : $m\vec{a} = \vec{f}$.

Considérons deux référentiels, \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' , définis respectivement par les repères (\mathcal{O}, x, t) et (\mathcal{O}', x', t') , le second étant en translation rectiligne uniforme de vitesse \vec{V} , comme décrit dans la figure 2.1. \vec{V} est supposé parallèle à l'axe $\mathcal{O}x$. Nous utiliserons cette définition de \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' dans tout le chapitre.

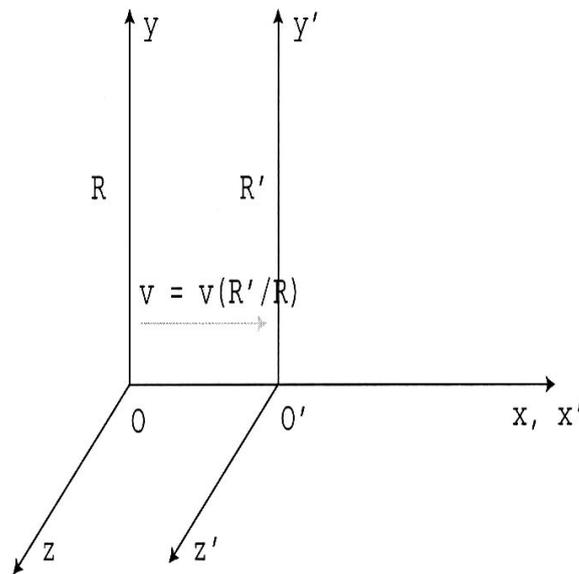


FIGURE 2.1 – Référentiels en mouvement relatif de translation.

Pour exprimer les lois de Newton dans le référentiel \mathfrak{R}' , on applique la loi de composition des vitesses $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ (transformation galiléenne) :

$$\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}' \quad (2.1)$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \text{ donc } \vec{v}' = C\vec{t}e \text{ si } \vec{v} = C\vec{t}e \quad (2.2)$$

$$\vec{a} \rightarrow \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.3)$$

On dit que les lois de Newton sont *invariantes* par changement de référentiel inertiel et

transformation galiléenne. C'est la remise en cause de cette invariance – et de la loi de composition des vitesses – qui aboutira à la théorie de la relativité restreinte.

2.1.2 Conflit entre mécanique newtonienne et électromagnétisme

À la fin du 19^e siècle, la mécanique newtonienne se heurte à deux problèmes, le premier théorique, le second expérimental :

- la théorie de Maxwell, par ailleurs capable de décrire tous les phénomènes électromagnétiques connus, n'est pas invariante par transformation galiléenne ;
- l'expérience de Michelson-Morley montre que la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel inertiel, en contradiction évidente avec la loi galiléenne de composition des vitesses.

Électromagnétisme et vitesse de la lumière

La seconde moitié du 19^e siècle a vu le succès triomphal de la théorie de Maxwell, qui parvient, d'une part, à unifier tous les phénomènes électromagnétiques, et d'autre part, à relier l'optique et l'électromagnétisme. Nous rappelons ici brièvement comment la théorie de Maxwell prouve le caractère électromagnétique de la lumière. Des quatre équations de Maxwell :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} ; \quad (2.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 ; \quad (2.5)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad (2.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

découle directement l'équation d'onde suivante pour le champ électrique :

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (2.8)$$

Les équations de Maxwell prédisent donc l'existence d'une onde électromagnétique se propageant à une vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Les mesures des constantes ϵ_0 et μ_0 donnent une vitesse en accord avec la mesure de la vitesse de la lumière, prouvant ainsi son caractère électromagnétique.

Ce succès entraîne cependant un problème : les seules ondes connues à cette époque, telles que le son, ou les vagues à la surface d'un liquide, se propagent dans un milieu bien défini. Par exemple, le son correspond à la propagation d'une variation de pression dans un matériau (l'air, l'eau, etc.). Il semblait donc naturel qu'il en soit de même pour la lumière. Par ailleurs, les équations de Maxwell ne sont pas invariantes par transformation galiléenne. Cela conduisit à faire l'hypothèse de l'existence d'un milieu, *l'éther luminifère*, dont le seul rôle serait de véhiculer la lumière. Dans ce cas, le référentiel du milieu est privilégié par rapport aux autres (la vitesse de propagation est définie par

rapport au milieu, et non par rapport à l'émetteur de l'onde), ce qui explique l'apparente contradiction avec la relativité galiléenne. L'hypothèse de l'éther, confrontée à l'expérience, rencontre cependant de fortes difficultés. Ainsi, trois hypothèses s'offraient aux physiciens à la fin du 19^e.

- Hypothèse 1 : les équations de Maxwell sont incorrectes puisqu'elles ne sont pas invariantes par transformations galiléennes. Compte tenu de l'incroyable succès de la théorie, cette hypothèse semblait peu crédible.
- Hypothèse 2 : la relativité galiléenne ne s'applique pas à l'électromagnétisme car l'éther luminifère privilégie un référentiel par rapport aux autres.
- Hypothèse 3 : le principe de relativité s'applique à la mécanique et à l'électromagnétisme mais les lois de la mécanique doivent être revues.

Bien que le concept d'éther nous semble aujourd'hui farfelu, c'est cette hypothèse qui fut (à tort) retenue pendant longtemps.

2.1.3 Tentatives de vérification de la théorie de l'éther

Si la lumière se propage avec une vitesse $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ dans l'éther, et si l'on considère que la Terre se déplace dans l'éther sans l'affecter, la vitesse relative de la Terre par rapport à l'éther devrait se manifester par une différence de la vitesse de la lumière par rapport à la Terre dans différentes directions. Michelson, puis Michelson et Morley², tentèrent d'observer une telle différence à l'aide d'un interféromètre (figure 2.2). Michelson et Morley menèrent leur expérience à plusieurs époques de l'année de manière à observer un effet éventuel du mouvement de la Terre sur la vitesse relative de la lumière dans les deux directions perpendiculaires du dispositif expérimental. Comme aucun effet de ce type ne fut observé, ils conclurent que la vitesse de la lumière mesurée dans deux directions orthogonales était la même à un sixième de la vitesse orbitale de la Terre près, soit 5 km/s .

L'expérience de Michelson et Morley et ses améliorations modernes montrent que la vitesse de la lumière est isotrope dans tous les référentiels inertiels. Ce résultat est cependant insuffisant pour invalider définitivement l'hypothèse de l'éther. On suggéra par exemple que les objets se déplaçant à une vitesse v par rapport à l'éther subissent une contraction de Fitzgerald-Lorentz $L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ dans la direction du mouvement, et on parvint à expliquer ainsi le résultat nul de l'expérience de Michelson. Cependant l'hypothèse de l'éther devient difficilement tenable lorsque l'on tente d'expliquer les variations de vitesse de la lumière dans la matière par un entraînement partiel de l'éther, entraînement qui serait mystérieusement lié à l'indice de réfraction du matériaux traversé... Il faut donc accepter la troisième hypothèse, et développer une nouvelle théorie qui réconcilie principe de relativité et universalité de la vitesse de la lumière.

2.2 Implications d'une vitesse invariante de la lumière

La relativité restreinte est fondée sur deux postulats fondamentaux.

2. A.A. Michelson et E.W. Morley, Am. Jour. of Science, **34** (1887) 333.

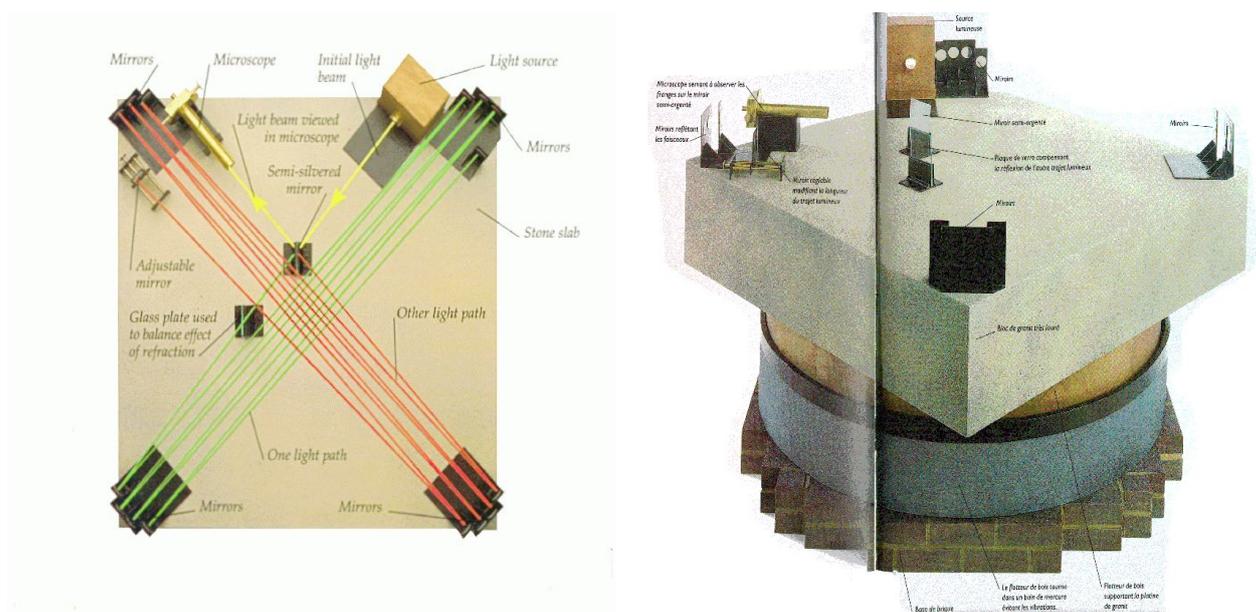


FIGURE 2.2 – Schéma de l'expérience de Michelson - Morley.

- Le principe de relativité (galiléenne) : les lois de la physique sont invariantes par changement d'un référentiel inertiel à un autre. On ne peut pas mesurer de vitesse absolue.
- L'universalité de la vitesse de lumière : la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel inertiel ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$) ; c'est-à-dire que deux observateurs non-accélérés en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre verront passer devant eux un *même* photon à la même vitesse c , quelle que soit leur vitesse relative.

Pour satisfaire à la condition que la vitesse de la lumière est la même dans tout référentiel inertiel, la transformation galiléenne doit être abandonnée au profit de la transformation dite de Lorentz, que nous dériverons dans la section suivante. Nous allons voir qu'il est possible de dériver les propriétés fondamentales de la relativité restreinte à partir de ces deux postulats et de raisonnements géométriques simples³.

Diagramme d'espace-temps

La figure 2.3 montre un exemple de diagramme d'espace-temps (où l'on se limite à une dimension spatiale pour simplifier). On appelle « événement » un point de l'espace-temps, c'est-à-dire l'association d'une position spatiale et d'un instant (par exemple l'émission d'un photon est défini par la position de la source et l'instant auquel le photon est émis). On appelle « ligne d'univers » le lieu des points de l'espace-temps occupés par une particule. Par exemple la ligne d'univers d'une particule se déplaçant à une vitesse constante \vec{v} est une droite de pente $dt/dx = 1/v$. En particulier, dans un

3. Pour un traitement détaillé d'une approche géométrique de la relativité, voir l'excellente introduction « A first course in general relativity », de B. F. Schutz (Ed. Cambridge University Press).

« bon » système d'unités où $c = 1$ (voir annexe C), la ligne d'univers d'un photon est une droite de pente 1.

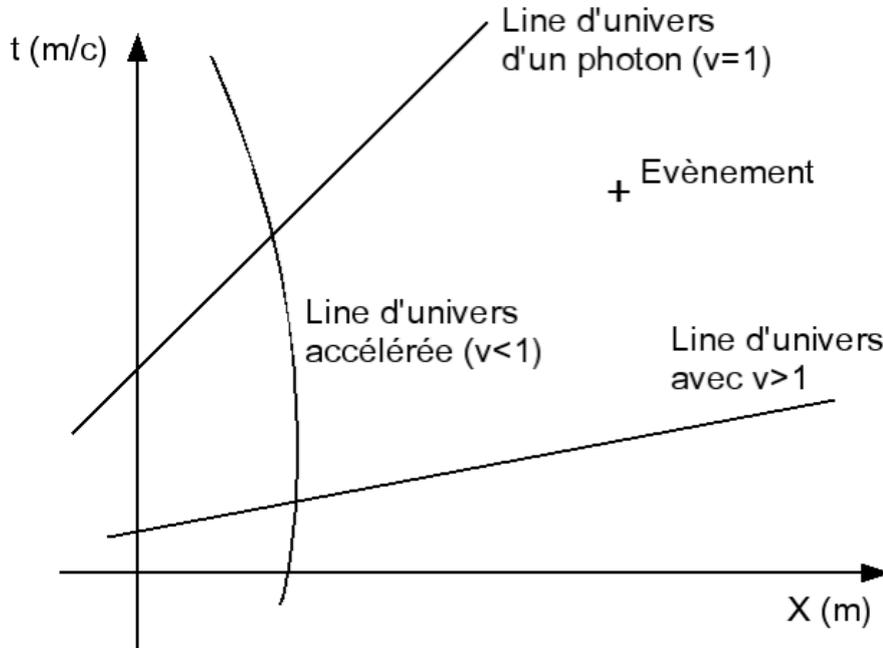


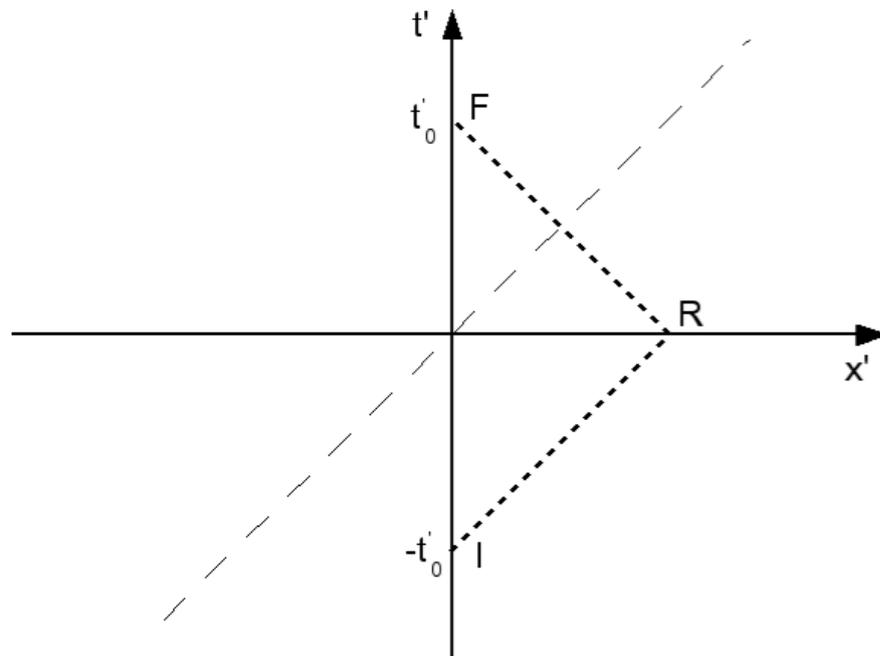
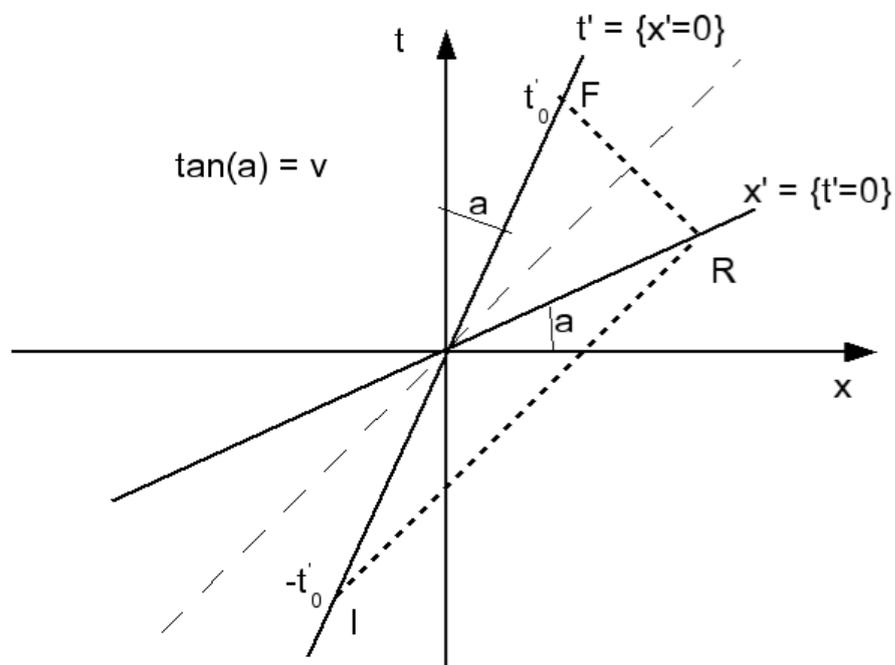
FIGURE 2.3 – Diagramme d'espace-temps.

Notion de simultanéité en relativité

Considérons à nouveau les deux référentiels \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' . Nous souhaitons déterminer la transformation permettant d'obtenir les coordonnées dans \mathfrak{R}' à partir de celles dans \mathfrak{R} en prenant en compte les deux postulats de la relativité. Il nous suffit pour cela de déterminer les axes $\mathcal{O}x'$ et $\mathcal{O}t'$ dans le repère de \mathfrak{R} .

L'axe $\mathcal{O}t'$ est le lieu des événements tels que $x' = 0$. L'origine des repères ayant été choisie identique, $\mathcal{O}t'$ correspond à la droite telle que $x = vt$ (voir figure 2.5).

L'axe $\mathcal{O}x'$ est plus difficile à déterminer. Considérons la situation décrite par le diagramme de la figure 2.4 : dans le référentiel \mathfrak{R}' , un photon est émis en $x' = 0$ à $t' = -t'_0$ (événement I), et atteint l'axe $\mathcal{O}x'$ en $x' = ct'_0$ à $t' = 0$, ou il est réfléchi (événement P), puis revient à la position $x' = 0$ à $t' = t'_0$ (événement F). On voit que l'axe $\mathcal{O}x'$ est le lieu des événements qui correspondent à la réflexion d'un photon émis à $x' = 0$ à l'instant $t' = -t'_0$ et qui revient à $x' = 0$ à l'instant $t' = t'_0$, pour tout $t'_0 > 0$. Ce résultat est évident dans le repère (\mathcal{O}, x', t') ; il l'est beaucoup moins dans le repère (\mathcal{O}, x, t) . Regardons la figure 2.5 : les événements I et F sont situés sur l'axe $\mathcal{O}t'$, et sont équidistants de l'origine. L'événement R est le point d'intersection des lignes d'univers du photon provenant de I, et atteignant F ; **puisque la vitesse du photon est la même dans les deux référentiels, ces lignes d'univers sont, de même que dans \mathfrak{R}' , des droites de pente 1.** Cette construction permet de définir l'axe $\mathcal{O}x'$, qui s'avère être

FIGURE 2.4 – Réflexion en R d'un photon émis en I , dans le référentiel \mathcal{R}' .FIGURE 2.5 – La même réflexion qu'à la figure 2.4, vue dans le référentiel \mathcal{R} .

symétrique de $\mathcal{O}t'$ par rapport à la médiane de $\mathcal{O}x$ et $\mathcal{O}t$. Les axes $\mathcal{O}x$ et $\mathcal{O}x'$ sont donc distincts et le temps dans le référentiel \mathfrak{R}' est une combinaison linéaire du temps et de l'espace dans le référentiel \mathfrak{R} . Le temps n'est pas le même vu dans différents référentiels : il perd son caractère absolu. En particulier, **des événements simultanés dans \mathfrak{R}' ne le sont pas dans \mathfrak{R} !** Le temps et l'espace, bien que de nature différente, sont intimement liés, c'est pourquoi l'on parle d'espace-temps quadridimensionnel (qui remplace l'espace tridimensionnel évoluant dans le temps absolu de la mécanique newtonienne).

Invariance de l'intervalle entre deux événements

On appelle **intervalle** entre deux événements définis par les coordonnées (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) dans le référentiel \mathfrak{R} la quantité :

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (2.9)$$

L'intervalle est l'équivalent relativiste de la distance euclidienne (ou plutôt du carré de celle-ci) en mécanique classique. Il ne s'agit cependant pas d'une distance à strictement parler puisque ce n'est pas une forme quadratique définie positive ; on parle de pseudo-distance. Imaginons un instant que ces deux événements correspondent à l'émission et à l'absorption d'un même photon, à savoir :

1er événement : émission en (x_1, y_1, z_1) , à l'instant t_1 , d'un signal lumineux.

2ème événement : réception en (x_2, y_2, z_2) , à l'instant t_2 , de ce signal.

Comme le photon se propage avec la vitesse c , la distance qu'il parcourt entre les deux événements est $c(t_2 - t_1)$. Cette distance est évidemment égale à

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

si bien que l'intervalle est nul :

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0. \quad (2.10)$$

Il est aussi possible d'observer la propagation de ce même photon dans le référentiel \mathfrak{R}' ; parce que le photon se propage à la même vitesse c dans les deux référentiels, on obtient de même :

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0. \quad (2.11)$$

On en déduit que si l'intervalle est nul dans un référentiel inertiel, il l'est dans tout autre référentiel inertiel. Nous allons montrer que ce résultat est vrai dans le cas général, c'est-à-dire que tout intervalle entre deux événements est invariant par changement de référentiel.

Considérons la différentielle de l'intervalle :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.12)$$

Si ds et ds' désignent les intervalles entre deux événements observés dans les référentiels \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' , on peut montrer (voir annexe A) qu'elles sont proportionnelles, i.e. qu'il existe a , dépendant *a priori* de \vec{V} , tel que :

$$ds^2 = a(\vec{V}) ds'^2. \quad (2.13)$$

On peut se convaincre aisément que a ne peut être fonction que de la norme de la vitesse relative des deux référentiels. En effet, si a dépendait de la direction de \vec{V} , cela remettrait en cause l'isotropie de l'espace, et s'il dépendait des coordonnées et du temps, l'espace-temps ne serait pas homogène. Par conséquent :

$$ds^2 = a(V)ds'^2. \quad (2.14)$$

Considérons trois référentiels \mathfrak{R} , \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_2 , et soient \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vitesses relatives de déplacement de \mathfrak{R}_1 et \mathfrak{R}_2 par rapport à \mathfrak{R} . On a alors :

$$ds^2 = a(V_1)ds_1^2 \quad \text{et} \quad ds^2 = a(V_2)ds_2^2. \quad (2.15)$$

On peut aussi écrire :

$$ds_1^2 = a(V_{12})ds_2^2, \quad (2.16)$$

où V_{12} est la norme de la vitesse relative de déplacement \vec{V}_{12} de \mathfrak{R}_2 par rapport à \mathfrak{R}_1 . En identifiant les expressions des équations (2.15) et (2.16), on obtient :

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (2.17)$$

Or V_{12} dépend non seulement des normes des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 , mais aussi de l'angle entre ces deux vecteurs⁴. Mais la dépendance en cet angle n'apparaît pas dans le premier membre de la relation (2.17) ; cette dernière ne peut donc être vérifiée que si la fonction $a(V)$ est une constante, qui, toujours d'après cette même relation, ne peut donc être égale qu'à l'unité. Par conséquent :

$$ds^2 = ds'^2. \quad (2.18)$$

L'égalité des intervalles infiniment petits implique celle des intervalles finis quelconques, i.e. $s = s'$.

L'intervalle entre les événements est le même dans tous les référentiels, ce qui signifie qu'il est invariant par rapport aux transformations assurant le passage d'un référentiel d'inertie à un autre. L'invariance de l'intervalle est donc l'expression mathématique de la constance de la vitesse de la lumière.

Cône de lumière

On distingue trois genres d'intervalles :

- $\Delta s^2 > 0$: l'intervalle est de **genre temps** (« time-like ») ;
- $\Delta s^2 < 0$: l'intervalle est de **genre espace** (« space-like ») ;
- $\Delta s^2 = 0$: l'intervalle est de **genre lumière** (« light-like »).

4. Notons que nous n'avons pas besoin de présupposer la forme de la loi de composition des vitesses pour parvenir à ceci : il s'agit du cas le plus général.

Un intervalle de genre lumière correspond à la ligne d'univers d'un photon reliant les deux événements de l'intervalle. Si l'intervalle est de genre temps ($\Delta s^2 > 0$), il est possible de connecter les deux événements par une ligne d'univers de vitesse inférieure à c . En revanche, seule une ligne d'univers dépassant la vitesse de la lumière peut produire un intervalle de genre espace. Il est facile de se rendre compte qu'une telle ligne d'univers brise la causalité en étudiant le diagramme d'espace-temps de la figure 2.6. Considérons qu'une particule soit émise de l'origine (en $x_I = 0$ à $t_I = 0$) et se déplace à une vitesse w supérieure à c (le long de l'axe $\mathcal{O}x$) dans le référentiel \mathcal{R} pour atteindre l'événement F de coordonnées x_F, t_F (dans \mathcal{R}). Nous avons vu comment déterminer les axes $\mathcal{O}x'$ et $\mathcal{O}t'$ du référentiel \mathcal{R}' dans le repère de \mathcal{R} . Si l'on considère une vitesse relative entre \mathcal{R} et \mathcal{R}' suffisamment élevée ($V > 1/w$), on observe que $t'_F < t'_I$, c'est-à-dire que la particule est arrivée avant d'être partie ! Le principe de causalité (un effet ne peut précéder la cause) implique donc qu'une particule ne peut se propager à une vitesse supérieure à c . De manière plus générale, il ne peut y avoir de relation causale entre deux événements de genre espace.

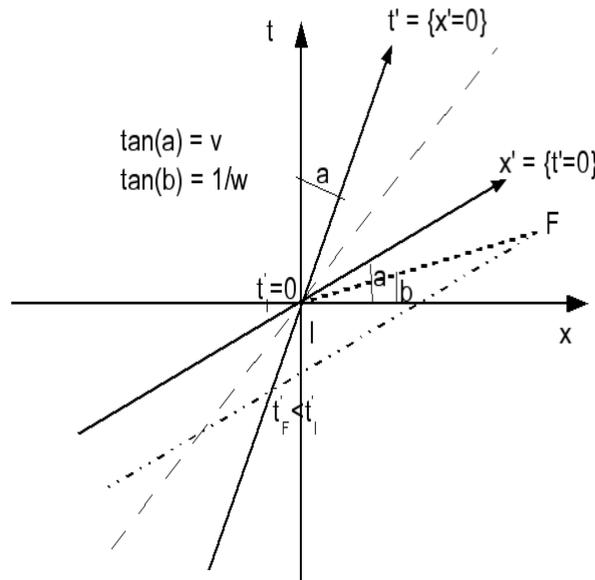


FIGURE 2.6 – Diagramme d'espace-temps d'une particule se propageant de I à F à une vitesse $w > c$. On peut comparer les coordonnées temporelles de I et F dans \mathcal{R}' en projetant F sur l'axe $\mathcal{O}t'$ parallèlement à l'axe $\mathcal{O}x'$: $t'_F < t'_I$, c'est-à-dire que, du point de vue de \mathcal{R}' , la particule est arrivée avant d'être partie !

Le cône d'équation $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0$ (**cône de lumière**) divise l'espace-temps en trois parties (Cf. figure 2.7) :

- **le futur** : événements x que l'événement à l'origine peut influencer. L'intervalle x est de genre temps ;
- **le passé** : événements x qui peuvent influencer l'événement origine. L'intervalle x est de genre temps ;

- **l'ailleurs** : événements sans relation causale possible avec l'origine. L'intervalle x est de genre espace.

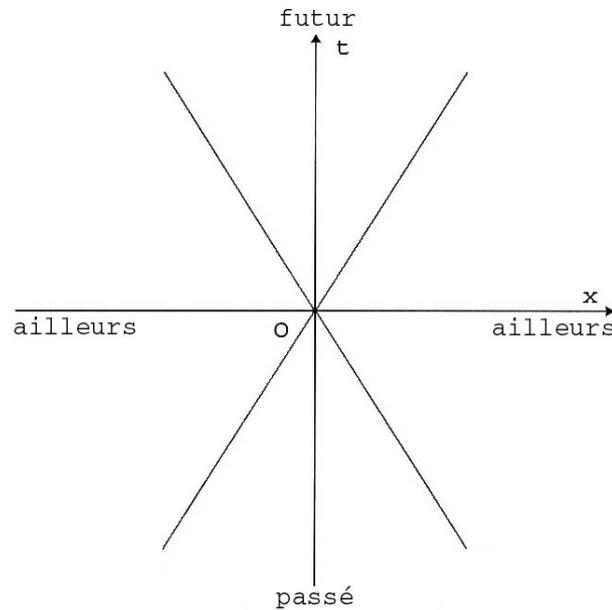


FIGURE 2.7 – Cône de lumière.

2.2.1 Dilatation du temps

Nous avons montré précédemment que les coordonnées d'espace et de temps étaient linéairement transformées par changement de référentiel, de sorte que (Cf. figure 2.5) :

$$t = \alpha \cos a t' \quad (2.19)$$

$$x = \alpha \sin a t' \quad (2.20)$$

où a est tel que $\tan a = V$, et α est une constante, *a priori* fonction de \vec{V} . Nous allons utiliser l'invariance de l'intervalle pour déterminer complètement le changement de coordonnées (nous connaissons la direction des axes, mais il nous reste à en déterminer la norme). Considérons à nouveau le diagramme de la figure 2.5. Soit un événement E situé sur l'axe \mathcal{O}' , de coordonnées (x_E, t_E) dans \mathfrak{R} et (x'_E, t'_E) dans \mathfrak{R}' . On a $x'_E = 0$ et $x_E = V t_E$, par définition de l'axe \mathcal{O}' . Par conséquent, l'intervalle entre l'origine et l'événement E, évalué dans les deux référentiels, donne les relations :

$$c^2 \Delta t'^2 = \Delta s^2 \quad (2.21)$$

$$= c^2 \Delta t^2 - x^2 \quad (2.22)$$

$$= c^2 \Delta t^2 - (V \Delta t)^2 \quad (2.23)$$

$$\Delta t'^2 = \Delta t^2 \times (1 - V^2/c^2) \quad (2.24)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (2.25)$$

De manière analogue, on trouve :

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (2.26)$$

Le repère (\mathcal{O}, x', t') est maintenant complètement connu en fonction du repère (\mathcal{O}, x, t) .

L'intervalle de temps $\Delta t'$ correspond à l'intervalle entre l'origine et l'événement E, donc à une ligne d'univers d'un objet immobile dans \mathfrak{R}' . On peut donc l'interpréter comme la différence des temps indiqués par une même horloge, immobile dans \mathfrak{R}' , au début et à la fin de la ligne d'univers. En contraste, Δt correspond à la différence des temps mesurés par deux horloges différentes, chacune immobile dans \mathfrak{R} , l'une se situant sur une ligne d'univers passant par l'origine, l'autre sur une ligne d'univers passant par E. Il est intéressant de constater que ces deux systèmes de mesure donnent des résultats différents ! Le temps ne semble pas s'écouler de la même façon dans les deux référentiels : du point de vue de \mathfrak{R} , le temps s'écoule moins vite dans \mathfrak{R}' . On parle de dilatation du temps.

Ce résultat peut donner l'impression que le principe de relativité n'est pas respecté, puisque l'on a conclu que le temps s'écoulait plus lentement dans \mathfrak{R}' que dans \mathfrak{R} . En fait, on aurait pu aussi bien considérer le point de vue de \mathfrak{R}' observant \mathfrak{R} avec une vitesse relative $-\vec{V}$, et conclure que le temps s'écoule plus lentement dans \mathfrak{R} que dans \mathfrak{R}' . Les deux conclusions ne sont pas contradictoires parce qu'elles concernent des événements différents.

2.2.2 Contraction des longueurs

Considérons une barre rigide de longueur l au repos dans le référentiel \mathfrak{R}' (voir figure 2.8). Quelle est la longueur de cette barre dans le référentiel \mathfrak{R} ? Il s'agit avant tout de bien poser le problème. La longueur de la barre est la distance euclidienne qui sépare les extrémités de celle-ci **à un même instant**. Or, comme nous l'avons vu, la simultanéité de deux événements est relative au référentiel considéré : la longueur de la barre correspond donc à la longueur du segment $I_1 I_2$ dans le référentiel \mathfrak{R} , et à la longueur du segment $I_1 I'_2$ dans le référentiel \mathfrak{R}' . Par définition, $I_1 I'_2 = l$ et l'événement I'_2 a pour coordonnées $x'_{I'_2} = l$ et $t'_{I'_2} = 0$ dans le référentiel \mathfrak{R}' . En utilisant le résultat de la section précédente, on trouve que l'événement I'_2 a pour coordonnées dans le référentiel \mathfrak{R} :

$$x_{I'_2} = \frac{x'_{I'_2}}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{l}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} \quad (2.27)$$

Par ailleurs, on calcule trivialement que :

$$x_{I'_2} = x_{I_2} + V t_{I'_2} \quad (2.28)$$

$$= x_{I_2} + (V/c)^2 x_{I'_2} \quad (2.29)$$

$$x_{I_2} = x_{I'_2} (1 - (V/c)^2) \quad (2.30)$$

$$x_{I_2} = l \sqrt{1 - (V/c)^2} \quad (2.31)$$

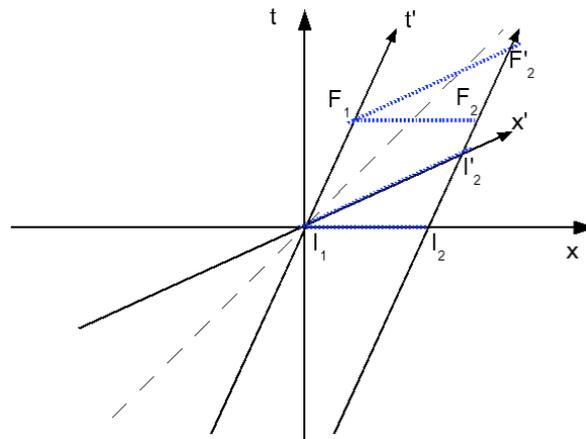


FIGURE 2.8 – Diagramme d'espace-temps d'une barre rigide au repos dans le référentiel \mathcal{R}' . La barre est représentée dans le référentiel \mathcal{R} aux instants t_I et t_F par les segments $I_1 I_2$ et $F_1 F_2$ (resp.), ainsi que dans le référentiel \mathcal{R}' aux instants t_I et t_F par les segments $I_1' I_2'$ et $F_1' F_2'$ (resp.).

Du point de vue de \mathcal{R} , la barre apparaît donc plus courte! On parle de contraction de Lorentz, ou contraction des longueurs. Ce résultat est une conséquence directe de la non-universalité de la simultanéité.

Exercice : Systèmes de référence inertiels liés à la Terre. Nous avons dit qu'un système de référence est inertiel dans une certaine région de l'espace-temps si les particules test, au repos par rapport à lui et contenues dans cette région, restent au repos dans certaines limites de précision fixées. Par exemple, un vaisseau spatial en chute libre au voisinage de la Terre constitue effectivement un système inertiel pendant la durée de la chute. Cependant, beaucoup d'expériences faisant intervenir des particules rapides et la lumière elle-même se font dans des laboratoires qui ne sont pas en chute libre, car liés à la Terre. La force exercée par la pesanteur est présente dans tous ces laboratoires. Mais certaines de ces expériences nécessitent si peu de temps qu'une particule test libérée au début de la manipulation n'est pas tombée très loin quand elle finit. Pour bien des expériences, un laboratoire lié à la Terre constitue donc un système inertiel avec une excellente précision.

1. Une particule élémentaire qui se déplace à 0,96 fois la vitesse de la lumière traverse une chambre à étincelles cubique d'un mètre d'arête. Quelle sera la hauteur de chute effectuée pendant le même temps par une particule test indépendante, initialement au repos et libérée dans le champ de gravitation terrestre? Comparer la réponse obtenue aux dimensions du noyau atomique ($\simeq 10^{-15}$ m). Résumer ceci en donnant les dimensions de la région d'espace-temps dans laquelle le système du laboratoire lié à la Terre est inertiel avec une précision donnée. Quelles dimensions faudrait-il donner à la chambre à étincelles pour que la particule test indépendante, initialement au repos, tombe d'une hauteur *mesurable* pendant le temps

que la particule de vitesse $0,96 \times c$ met à la traverser ?

2. Dans l'expérience de Michelson-Morley, un faisceau lumineux est réfléchi d'avant en arrière entre paires de miroirs sensiblement distants de 2 m. Il peut ainsi parcourir une distance totale de 22 m avant de former la figure d'interférence. Quelle sera la hauteur de chute parcourue par une particule test initialement au repos dans le champ de gravitation terrestre pendant le temps nécessaire à un photon pour traverser l'appareil de Michelson-Morley ? Avec quelle précision peut-on considérer que le système lié à la Terre est inertiel pour la région de l'espace-temps dans laquelle se passe l'expérience de Michelson-Morley ?

Remarque : Solide en relativité restreinte. Soulignons tout de suite que l'existence d'une vitesse maximale de propagation des interactions impose de traiter les particules élémentaires comme ponctuelles (au moins en théorie non quantique). En effet, afin de décrire un système physique non ponctuel, on introduit la notion de solide parfait, i.e. de corps parfaitement indéformable. En théorie de la relativité, on devrait entendre par solide parfait tout corps dont toutes les dimensions restent constantes dans un référentiel par rapport auquel ce corps est au repos. Cependant, considérons un corps solide qu'on met en mouvement en appliquant une action extérieure à l'un de ses points. Si le corps était rigide, tous ses points devraient se mettre en mouvement au même instant que le point qui a été soumis à l'action extérieure, car autrement il subirait des déformations. Cette simultanéité est exclue par l'hypothèse d'existence d'une vitesse maximale finie de propagation des interactions.

2.3 Cinématique

Notation. À partir de maintenant, et dans toute la suite de ce chapitre, on note \vec{V} la vitesse relative constante de déplacement de deux référentiels d'inertie, et \vec{v} (ou \vec{v}') la vitesse d'une particule dans un de ces deux référentiels.

2.3.1 Transformation de Lorentz

Transformation des coordonnées d'espace et de temps

Matrice de Lorentz. On considère ici deux référentiels d'inertie dans la situation de la figure 2.1. Connaissant les coordonnées (x, y, z, t) d'un événement dans le référentiel \mathfrak{R} , on cherche les coordonnées (x', y', z', t') de ce même événement dans le référentiel \mathfrak{R}' . On cherche ici la (ou les) transformation(s) qui préserve(nt) la quantité $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ dans le changement de référentiel envisagé.

Il est logique de supposer ces transformations linéaires, puisqu'un mouvement **rectiligne et uniforme** dans \mathfrak{R} doit rester **rectiligne et uniforme** dans \mathfrak{R}' . Ceci se comprend intuitivement sur la figure 2.9 ; examinons les positions successives aux dates t_1, t_2 et t_3 dans \mathfrak{R} d'un point matériel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. Si aux dates correspondantes t'_1, t'_2 et t'_3 , les positions dans \mathfrak{R}' de ce point sont dans un ordre différent, par exemple t'_2, t'_1 et t'_3 , c'est certainement que ce point a d'abord

accélééré, puis ralenti avant de changer le signe de sa vitesse pour revenir en arrière ; son mouvement n'a donc pas été uniquement rectiligne uniforme. Plus précisément, il faut certainement que l'application qui fait passer de \mathfrak{R} à \mathfrak{R}' conserve le barycentre. Il est donc légitime de supposer que ce changement de coordonnées est linéaire. Ce point est démontré dans l'annexe A.

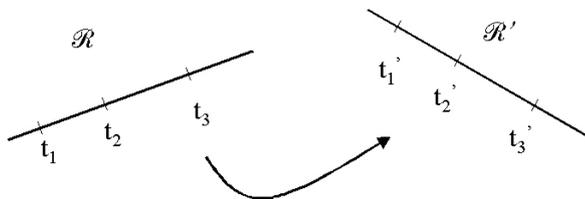


FIGURE 2.9 – Linéarité des formules de changement de référentiel inertiel.

Par ailleurs, la configuration retenue impose la forme de la transformation recherchée :

$$\begin{cases} x = Ax' + Bt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = Cx' + Dt' \end{cases} \quad (2.32)$$

Cela montre qu'on ne s'intéresse en fait qu'aux « rotations »⁵ dans le plan (t, x) . Notre paramétrage doit se contenter de vérifier : $c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2$, ce qui permet de poser en toute généralité :

$$x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi, \quad (2.33)$$

$$ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi. \quad (2.34)$$

pour un certain réel ψ . Ceci revient à écrire (2.32) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & c \sinh \psi \\ \frac{\sinh \psi}{c} & \cosh \psi \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Mais alors pour l'origine des coordonnées de \mathfrak{R}' , on a $x' = 0$, et donc :

$$x = ct' \sinh \psi, \quad (2.36)$$

$$ct = ct' \cosh \psi. \quad (2.37)$$

En divisant membre à membre ces deux équations, il vient :

$$\frac{x}{ct} = \tanh \psi. \quad (2.38)$$

Mais comme la vitesse de translation est **constante**, on a : $V = \frac{x}{t}$, si bien que :

$$\tanh \psi = \frac{V}{c}. \quad (2.39)$$

5. Les précautions prises ici dans l'emploi du mot rotation viennent de ce que les rotations considérées dans le présent problème ont un angle imaginaire pur !

Comme on sait que $1 - \tanh^2 \psi = \frac{1}{\cosh^2 \psi}$, on en déduit :

$$A = D = \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \text{ et } \frac{B}{c} = cC = \sinh \psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (2.40)$$

si bien que l'équation (2.32) se trouve à présent écrite sous la forme :

$$\begin{cases} x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.41)$$

C'est l'expression de la **transformation de Lorentz** ; elle s'inverse en ⁶ :

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (2.42)$$

On note usuellement $\beta = \frac{v}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Dans ces conditions, l'équation (2.42) fait apparaître la **matrice de Lorentz** Λ :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

et s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Pour $V \geq c$, ces formules montrent que les coordonnées x et t deviennent imaginaires ou infinies, ce qui traduit l'impossibilité de se déplacer avec une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.

Par ailleurs, la composée de deux transformations de Lorentz dépend en général de l'ordre dans lequel elles sont effectuées. Intuitivement, ceci est dû au fait géométrique que deux rotations d'axes distincts ne commutent pas en général.

6. On ne fait que changer la vitesse de rotation en son opposée pour aller de \mathfrak{R}' vers \mathfrak{R} .

Remarque. Dans le cas général, la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{r}}{\beta^2} - \vec{\beta} \gamma ct \quad (2.45)$$

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \quad (2.46)$$

Exercice : Loi relativiste de composition des vitesses. Quelle est la formule permettant de calculer la vitesse d'une particule matérielle dans un référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel inertiel ? La vitesse de la lumière est-elle invariante ? On se place dans la configuration habituelle, i.e. celle présentée figure 2.1.

Notant $v_x = \frac{dx}{dt}$ la composante de la vitesse dans \mathfrak{R} , et $v'_x = \frac{dx'}{dt'}$ sa composante dans \mathfrak{R}' , on doit trouver :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}} \quad \text{et} \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}} \quad \text{et} \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v'_x \frac{V}{c^2}} \quad (2.47)$$

Que se passe-t-il si \vec{v} est dirigée suivant (Ox) ? Suivant (Oy) ? Commenter. Faire le lien avec l'exercice suivant.

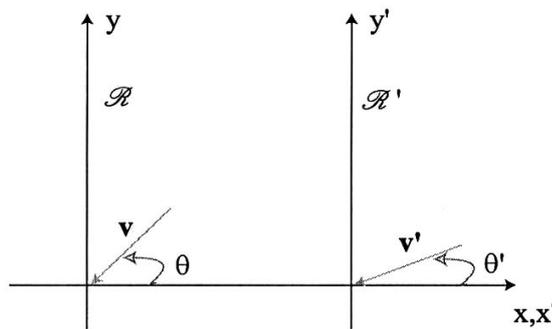


FIGURE 2.10 – Expression des composantes des vitesses dans 2 référentiels en mouvement relatif.

Exercice : Phénomène d'aberration de la lumière. On oriente les axes de coordonnées de sorte que la vitesse de la particule soit, à un instant donné, dans le plan xy , comme représenté sur la figure 2.10. Dans le référentiel \mathfrak{R} , la vitesse de la particule a pour composantes :

$$\begin{cases} v_x = -v \cos \theta \\ v_y = -v \sin \theta \end{cases} \quad (2.48)$$

et dans le référentiel \mathfrak{R}' , on a :

$$\begin{cases} v'_x = -v' \cos \theta' \\ v'_y = -v' \sin \theta' \end{cases} \quad (2.49)$$

Montrer que :

$$\tan \theta' = \frac{v \sin \theta \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V + v \cos \theta}. \quad (2.50)$$

Une application particulièrement importante est la déviation que subissent les rayons lumineux lorsqu'ils passent d'un référentiel à un autre. Vérifier que dans ce cas, la formule (2.50) devient :

$$\tan \theta' = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos \theta} \sin \theta. \quad (2.51)$$

Commenter la courbe de la figure 2.11, qui montre θ' en fonction de θ :

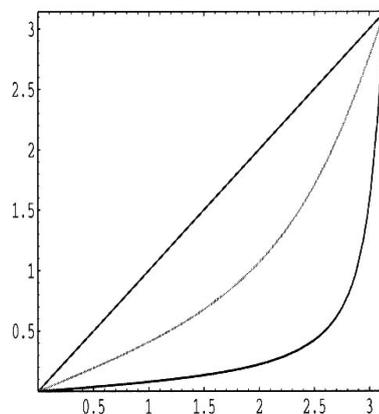


FIGURE 2.11 – Aberration lumineuse pour $\beta=0, 0,75$ et $0,99$; la courbure est une fonction croissante de β .

Les images de la figure 2.12 sont issues d'une simulation numérique⁷. Elles montrent une route vue depuis un véhicule relativiste initialement immobile (à gauche) puis se déplaçant à 76 % de la vitesse de la lumière (à droite). Interpréter. En particulier, dans quelle mesure pouvons-nous dire que nous voyons des choses situées derrière nous ? D'où vient la partie bleue du ciel ? Quel impact ce résultat peut-il avoir dans le cas d'une collision de particules ? Voir exercice : Collisions newtonienne et relativiste, page 64.

Le groupe de symétrie de la physique. A-t-on bien identifié toutes les transformations qui laissent invariantes ds^2 ? La réponse est non ; nous nous sommes contentés de trouver un certain type de transformations continues, qu'on appelle **transformations de Lorentz spéciales** ou **boosts** en Anglais.

Pour commencer, nous avons oublié les translations d'espace et de temps, ainsi que les rotations purement spatiales. Ceci se voit en raisonnant géométriquement : l'ensemble des transformations qui laissent invariant l'intervalle entre deux événements a naturellement une structure de groupe. Par exemple, le produit de deux transformations de

7. <http://www.anu.edu.au/Physics/Searle>.



FIGURE 2.12 – Aberration lumineuse pour $\beta=0$ et $0,75$; la courbure est une fonction croissante de β .

Lorentz spéciales n'est une transformation de Lorentz spéciale que si les vitesses sont parallèles; sinon, c'est le produit d'une transformation spéciale par une rotation. Les transformations de Lorentz et les rotations forment le **groupe de Lorentz**.

Le **groupe de Poincaré** est le groupe engendré par les translations d'espace et de temps, et le groupe de Lorentz.

Nous avons aussi oublié les **symétries discrètes** :

- Parité $\mathcal{P} : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$;
- Renversement temporel $\mathcal{T} : t \mapsto -t$.

Le groupe engendré par les transformations discrètes et le groupe de Lorentz forment le **groupe de Lorentz complet**.

Quel est alors le groupe de symétrie de la physique? Les équations de la Nature sont-elles invariantes sous le groupe complet de Lorentz augmenté des translations d'espace et de temps, ou simplement sous le groupe de Poincaré ainsi qu'Einstein l'a initialement formulé?

On sait depuis 1957 que la parité n'est pas une symétrie de toutes les lois de la Nature. En effet, certains processus de désintégration β violent cette invariance. Ceci montre simplement que la théorie de la relativité ne suffit pas : il faut encore introduire bien des éléments physiques pour parvenir à une description complète et fidèle de la Nature.

2.3.2 Temps propre et longueur propre

Temps propre

Supposons qu'on observe, depuis un référentiel d'inertie, une horloge animée d'un mouvement arbitraire. À tout instant, ce mouvement peut être considéré comme uniforme i.e. si $v(t)$ désigne la vitesse de l'horloge à la date t , il existe un référentiel en mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse constante $v(t)$ tel que, **à la date t** , son origine O' coïncide avec l'origine O du repère depuis lequel on étudie le mouvement de la particule. Un tel référentiel porte le nom de **référentiel de repos**.

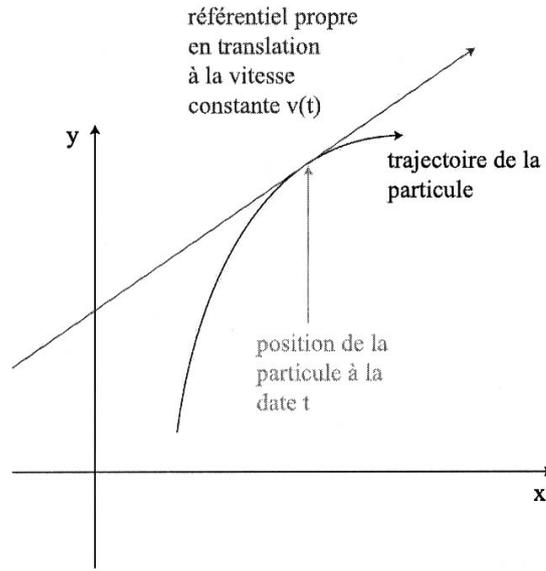


FIGURE 2.13 – Référentiel propre.

Si la distance parcourue par l'horloge mobile est $d\vec{r} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on voudrait savoir quel est l'intervalle de temps dt' qu'elle indique. Par rapport au système de coordonnées lié à l'horloge mobile, celle-ci est au repos, i.e. $dx' = dy' = dz' = 0$. En vertu de l'invariance de l'intervalle, on a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2, \quad (2.52)$$

d'où

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}}. \quad (2.53)$$

Or, la vitesse de l'horloge à l'instant t est $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$, si bien que (2.53) s'écrit

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ds}{c} (= dt/\gamma). \quad (2.54)$$

Le temps écoulé entre ces deux événements est appelé **temps propre**. Supposons maintenant que quelqu'un voyage le long d'une ligne d'univers entre deux événements a et b

muni d'une montre de très haute qualité. « Très haute qualité » signifie ici que l'accélération n'affecte pas le mécanisme de la montre. Une pendule à balancier n'est certainement pas un bon choix ; par contre, une horloge atomique est presque parfaite. Cette hypothèse, dite **hypothèse de l'horloge** dit que la fréquence d'une horloge accélérée **idéale** ne dépend pas de l'accélération.

Ainsi, lorsque selon l'horloge fixe il s'est écoulé un temps $t_2 - t_1$, le temps écoulé selon une horloge mobile *idéale* est, par intégration

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\gamma} \quad (2.55)$$

Le fait qu'il existe des horloges idéales est un fait expérimental. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Considérons maintenant un objet en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'étude. La variation de temps propre mesurée entre deux événements est toujours inférieure à l'intervalle de temps entre les deux mêmes événements mesuré dans le référentiel d'étude. Dit de manière plus imagée, une horloge mobile marche **plus lentement** qu'une horloge fixe.

Exercice : Temps de vie moyen des muons. Dans une expérience sur les muons, on constate que la moitié de ces particules se désintègre spontanément en un électron, un neutrino muonique et un anti-neutrino électronique toutes les $1,5 \mu s$, ce temps étant mesuré dans un système de référence par rapport auquel les muons sont au repos⁸.

Bien qu'on ne sache pas à quel moment un muon donné va se désintégrer, on peut faire des prévisions statistiques précises. Par exemple, si 1024 muons sont présents à un instant donné, il en restera en moyenne⁹ 512 au bout de $1,5 \mu s$, 256 après $3 \mu s$, 128 après $4,5 \mu s$, etc.

Un groupe de muons peut ainsi servir d'horloge commode pour mesurer des intervalles de temps courts. Si 568 muons sont présents lors d'un certain événement, mais qu'au moment où se produit un second événement, il n'en reste que 142, il s'est écoulé deux périodes, ou $3 \mu s$.

1. Considérons des muons produits à la suite de collisions entre les rayons cosmiques et les noyaux des gaz de l'atmosphère à 60 km au-dessus de la surface de la Terre. Ces muons suivent des trajectoires verticales dirigées vers le bas à une vitesse voisine de celle de la lumière. Combien de temps mettront-ils pour atteindre le sol selon les mesures faites par un observateur au repos à la surface de la Terre ? S'il n'y avait aucune dilatation du temps, quel serait le pourcentage des muons produits à 60 km qui atteindrait le sol avant de s'être désintégrés ?
2. Simplifions le contexte expérimental réel : on admet que tous les muons sont produits à la même altitude de 60 km , qu'ils ont tous la même vitesse, qu'ils se dirigent verticalement vers le bas et que $\frac{1}{8}$ d'entre eux atteignent la surface de la mer avant

8. Attention ! Il s'agit ici de la demie-vie, et non pas de la durée de vie, plus longue d'un facteur $\frac{1}{\ln 2}$.

9. Bien que ces résultats soient soumis à des fluctuations statistiques aléatoires, une population suffisamment importante de muons peut servir d'horloge.

de se désintégrer. Comment peut-il y avoir une telle différence entre les résultats trouvés à la question précédente et cette observation ? Quelle est la différence entre la vitesse de ces muons et celle de la lumière ?

Remarque. L'expérience de Rossi et Hall¹⁰ réalisant l'observation du phénomène de dilatation du temps pour les muons du rayonnement cosmique est historiquement la première à mesurer un effet important. L'expérience consistait à mesurer le temps mis pour parcourir une distance de quelques kilomètres, au moyen de l'horloge constituée par les muons eux-mêmes, et d'horloges fixes liées à la Terre. Un compteur A était installé au sommet du Mont Washington (New Hampshire) à une altitude de 1910 m ; il était réglé pour compter les muons de vitesse comprise entre $0,9950 \times c$ et $0,9952 \times c$. L'appareil au sommet du Mont Washington enregistrait chaque heure 563 ± 10 muons animés d'une telle vitesse. Quand l'appareil fut placé à 3 m au-dessus du niveau de la mer, il n'enregistrait plus que 408 ± 9 muons par heure.

Le voyageur de Langevin et le paradoxe des jumeaux. Deux jumeaux Nomade et Casanier habitent la Terre. Un jour, Nomade entreprend un voyage spatial vers une étoile distante de la Terre de $D = 10$ années-lumière à la **vitesse constante** $u = 0,98c$. La durée du voyage (aller et retour) pour Casanier resté sur Terre est $t = \frac{2D}{u} \simeq 20$ ans. L'horloge de Nomade dans le cosmos indiquera un temps égal à $\tau = \frac{t}{\gamma} = \frac{2D}{u} \sqrt{1 - \beta^2} \simeq 2$ ans. *A priori*, à son retour, Nomade est plus jeune que Casanier. Insistons sur le fait qu'à ce stade, cette situation n'est pas intuitive, mais en aucun cas paradoxale.

Cependant, si on inverse les rôles joués par les jumeaux, i.e. si on considère que c'est en fait Casanier qui est en mouvement dans le référentiel lié au vaisseau (immobile) de Nomade, le même calcul donnera $t = \frac{\tau}{\gamma} \simeq 2$ ans. Casanier est donc cette fois plus jeune que son frère Nomade, et la différence d'âge est la même que celle calculée précédemment ! Voilà le paradoxe.

D'après les postulats d'Einstein, **tous les référentiels d'inertie sont équivalents et donc indiscernables**. Mais les systèmes liés à Nomade et Casanier ne sont pas équivalents car Nomade, qui a effectué le voyage dans le cosmos, doit forcément subir des accélérations au départ (afin d'atteindre la vitesse u) et à l'arrivée pour s'arrêter. Les deux référentiels ne jouent pas un rôle symétrique puisque celui de Casanier est inertiel et que celui de Nomade ne l'est pas. Retenons alors la formulation précise qui lève le paradoxe : le jumeau qui a ressenti des accélérations est plus jeune que son frère au retour.

Penser que Nomade puisse laisser son frère jumeau Casanier dans son laboratoire, s'en aller animé d'une vitesse très élevée, revenir et se trouver plus jeune que Casanier qui est resté est contraire à l'expérience quotidienne. Mais l'expérience a déjà été réalisée (avec des particules, pas avec des jumeaux !) et la prédiction théorique a bien été vérifiée. La dilatation des durées n'est pas une idée d'un écrivain de science fiction, c'est le quotidien des physiciens des particules !

Par exemple, une expérience¹¹ de désintégration des leptons μ réalisée au CERN

10. B. Rossi et D.B. Hall, Phys. Rev. **59** (1941) 223.

11. F. Combley et al., Phys. Rept. **68** (1981) 93.

met en oeuvre des muons dans un anneau de stockage circulaire soumis à de fortes accélérations radiales ($\simeq 10^{19}g$). Ces muons vivent trente fois plus longtemps que des muons au repos. Ceci valide aussi l'hypothèse de l'horloge.

Il est intéressant de savoir que des expériences à des échelles plus proches de la notre ont aussi été réalisées. Par exemple Hafele et Keating¹² ont placé des horloges atomiques dans des avions de ligne commerciales faisant le tour du monde, et ont comparé le résultat avec une horloge restée sur Terre. Les résultats sont en parfait accord avec la théorie de la relativité dans la limite de la précision des horloges et des erreurs expérimentales.

Formalisons ce que nous venons d'apprendre. Considérons deux horloges dans un référentiel d'inertie. L'une reste fixe et l'autre décrit une trajectoire spatialement fermée, retournant à son point de départ, marqué par la position de l'horloge fixe. C'est alors l'horloge mobile qui retarde sur l'horloge fixe. On ne peut inverser le raisonnement en posant que c'est l'horloge mobile qui serait considérée comme une horloge fixe ; c'est impossible, puisque l'horloge décrivant une trajectoire fermée n'exécute pas un mouvement rectiligne uniforme, et le référentiel lié à cette horloge n'est pas un référentiel d'inertie.

L'intervalle de temps marqué par une horloge est égal à l'intégrale $\frac{1}{c} \int ds$ prise le long de la ligne d'univers de cette horloge. La ligne d'univers d'une horloge fixe est une droite parallèle à l'axe du temps. Si l'horloge exécute un mouvement non uniforme suivant un chemin fermé, et retourne à son point de départ, sa ligne d'univers sera une courbe interceptant la ligne d'univers rectiligne de l'horloge fixe en deux points correspondant au début et à la fin du mouvement (figure 2.14). D'autre part, l'horloge fixe indique toujours un intervalle de temps plus long que celui indiqué par l'horloge mobile. Ainsi, l'intégrale $\int ds$ prise entre deux points d'univers donnés présente sa valeur **maximale** si ces points sont reliés par une ligne d'univers droite¹³. Cette remarque nous servira à formuler une dynamique relativiste à l'aide d'un principe de moindre temps¹⁴ dans la section 2.4.3.

Longueur propre

Soit une règle au repos par rapport au référentiel \mathfrak{R} et disposée parallèlement à l'axe $\mathcal{O}x$. Sa longueur mesurée dans ce référentiel est égale à $\Delta x = x_2 - x_1$ où x_2 et x_1 sont les coordonnées des deux extrémités de la règle dans \mathfrak{R} . Cherchons la longueur de cette règle lorsqu'on la mesure dans le référentiel \mathfrak{R}' . On doit alors déterminer les valeurs x'_1 et x'_2 de ses coordonnées dans \mathfrak{R}' à un même instant t' . On tire des formules (2.41) les relations :

$$x_1 = \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (2.56)$$

12. Hafele et Keating, Nature **227** (1970) 270 (proposition) et Science **177** (1972) 166 (expérience).

13. On suppose évidemment que ces points et les lignes qui les relient sont tels que tous les intervalles élémentaires pris le long de ces lignes sont de « genre temps », cf. 2.2.

14. Plus précisément, on utilisera un principe de moindre action.

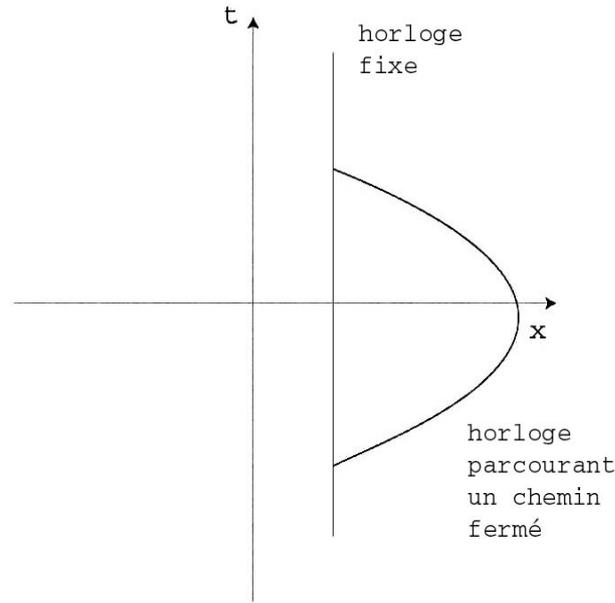


FIGURE 2.14 – Horloge fixe et trajectoire fermée.

Dans le référentiel \mathcal{R}' , la longueur de la règle est égale à $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. On a ainsi :

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (2.57)$$

On appelle **longueur propre** d'une règle sa longueur mesurée dans le référentiel par rapport auquel elle est en repos. Désignons-la par $l_0 = \Delta x$, et soit l sa longueur dans un autre référentiel \mathcal{R}' . Alors :

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (2.58)$$

Une règle paraît donc plus longue dans son référentiel de repos.

Notons d'ores et déjà que les **composantes transversales ne varient pas**. Le volume \mathcal{V} du corps est donc réduit dans les mêmes proportions :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \quad (2.59)$$

où \mathcal{V}_0 est le **volume propre** du corps. Cet effet est connu sous le nom de **contraction de Lorentz**.

Exercice : Le hangar et la perche. Considérons une perche de 20 m de long transportée si rapidement dans la direction qui lui est parallèle qu'elle ne paraît avoir plus que 10 m de long dans le système du laboratoire. À un moment donné, on peut donc la faire entrer toute entière dans un hangar de 10 m de long.

Un observateur, placé sur le toit du hangar, peut actionner simultanément des portes automatiques aux deux extrémités du hangar. Dès qu'il voit la perche complètement dans

le hangar, il ferme les deux portes pendant un court instant, puis les rouvre aussitôt. Pour cet observateur, la perche a donc été brièvement tout entière contenue dans ce hangar.

Plaçons-nous maintenant dans le système de référence du coureur tenant la perche. Pour lui, le hangar est contracté à la moitié de sa longueur. Comment une perche de 20 m pourrait-elle entrer dans un hangar de 5 m ? En particulier, est-ce que les portes automatiques vont se refermer sur la perche, et la casser ?

Comment faire entrer la perche et le hangar dans la théorie de la relativité sans qu'il en résulte de contradiction ?

Nous noterons H1 et H2 les extrémités du hangar, et P1 et P2 celles de la perche. Nous considérerons les événements E1 : « P1 en H1 » et E2 : « P2 en H2 ». Ces événements sont-ils simultanés ?

Nous retiendrons de cet exercice que le phénomène de contraction des longueurs ne fait que refléter la disparition de la notion absolue de simultanéité.

2.4 Géométrie de la relativité restreinte

Nous présentons dans cette section l'interprétation géométrique de la relativité restreinte introduite par Minkowski à la suite des travaux d'Einstein et de Poincaré. Ceci permet de simplifier et de formaliser les modes de transformation des différents grandeurs physiques.

Un événement est représenté par la donnée de quatre quantités $\{x^\mu | \mu = 0, 1, 2, 3\}$ dans un espace à quatre dimensions, l'**espace-temps**. Par convention, la première composante, x^0 , désigne la composante temporelle, alors que les trois autres composantes portent la dépendance spatiale. Dit autrement, les coordonnées de l'événement considéré x^μ sont :

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y \quad \text{et} \quad x^3 = z \quad (2.60)$$

Un tel ensemble de coordonnées porte le nom de **quadrivecteur**, noté parfois 4-vecteur. Selon le contexte, on commet parfois l'abus d'écriture consistant à noter x^μ un 4-vecteur pour éviter l'ambiguïté de la simple notation x .

Dans ce cadre géométrique, on peut dire que les transformations de Lorentz sont les formules de changement d'axes dans l'espace-temps à quatre dimensions sous lesquelles la « longueur » $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$ d'un 4-vecteur x^μ est invariante.

Il apparaît ainsi qu'on peut définir un formalisme dans lequel l'invariance de Lorentz apparaît comme une considération géométrique. Nous pouvons alors chercher à nous placer dans ce cadre géométrique privilégié en exprimant toute la physique dans ce langage. Pour ceci, nous allons classer toutes les quantités physiques en ensembles au comportement bien particulier sous l'effet de transformations de Lorentz. Par exemple, une grandeur inchangée par une transformation de Lorentz (comme c) est un scalaire ; quatre quantités qui se transforment ensemble comme les composantes du 4-vecteur x^μ forment un 4-vecteur, etc. Cette démarche doit pouvoir se généraliser à des ensembles de plus de quatre paramètres physiques qui évolueront de manière plus complexe avec les transformations de Lorentz. Pour formuler les choses de manière générale, nous avons besoin du **calcul tensoriel**, qui fournit un langage unifié à l'algèbre multilinéaire et

tout un ensemble de règles de calcul devenues aujourd'hui indispensables en physique. Nous allons d'abord illustrer ce propos dans le cadre des 4-vecteurs, puis nous étendre par la suite plus longuement sur l'outil tensoriel.

Revenons sur la définition du 4-vecteur x^μ , et généralisons. De même qu'en physique classique on appelle « grandeur vectorielle » un triplet de grandeurs qui se transforment comme les composantes x , y et z du vecteur position \vec{r} dans une rotation, on désignera par **quadrivecteur** a tout ensemble de quatre grandeurs (a^0, a^1, a^2, a^3) qui se transforment comme les x^μ dans un changement de référentiel. **On notera** $a = (a^0, \vec{a})$.

Ainsi, de même que l'égalité entre vecteurs $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ entraîne l'égalité $a_x = b_x + c_x$ quel que soit le système d'axes utilisé, une égalité entre 4-vecteurs impliquera l'égalité des composantes dans tous les référentiels inertiels. C'est l'avantage de l'usage des 4-vecteurs. Les lois physiques ainsi écrites seront donc **covariantes**, i.e. auront la même forme dans tous les référentiels inertiels.

2.4.1 Notions de calcul tensoriel

Le calcul tensoriel pratique

Plus de détails sur le calcul tensoriel sont donnés dans l'annexe A.2, où les choses sont abordées d'un point de vue plus formel.

La variance. Lors d'un changement de coordonnées dans un espace vectoriel de dimension n , lorsque les n composantes $A^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ d'un champ de vecteurs se transforment en n composantes $A'^\beta(y^1, y^2, \dots, y^n)$ selon la formule :

$$A'^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (2.61)$$

on dit que les composantes A^α de ce vecteur sont **contravariantes**. La répétition d'un même indice, situé « en haut » et « en bas » d'une expression est une notation condensée, dite **contractée**¹⁵ pour représenter une somme. C'est la **convention de sommation d'Einstein**. Il faut ici comprendre :

$$dy^\beta = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} A^\alpha = \sum_{\alpha=1}^n \partial_\alpha y^\beta A^\alpha \quad \forall \beta \quad (2.62)$$

où on note $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ le 4-gradient.

Exemples.

– Les composantes d'un élément $d\vec{r} = (dx^1, \dots, dx^n)$ sont contravariantes :

$$dy^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (2.63)$$

15. cf. contraction dans l'annexe A.2.

- une grandeur $A(x^1, x^2, \dots, x^n)$ qui ne varie pas au cours d'un changement de coordonnées est dite **scalaire** :

$$A'(y^1, y^2, \dots, y^n) = A(x^1, x^2, \dots, x^n). \quad (2.64)$$

On peut aussi définir une autre forme de variance semblable à celle introduite ci-dessus. Pour fixer les idées, on considère par exemple une grandeur scalaire $S(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Alors :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial y^\beta} dy^\beta = \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} dy^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (2.65)$$

L'identification par rapport aux dy^β des deux derniers membres donne :

$$\frac{\partial S}{\partial y^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n \quad (2.66)$$

Ainsi, la grandeur à n composantes $\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$ varie de façon « inverse » de celle rencontrée en (2.63). Ces composantes sont **covariantes**.

Pour les n composantes $A_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ covariantes d'un vecteur, le changement de coordonnées s'écrit :

$$A'_\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} A_\alpha \quad (2.67)$$

Retenons que (par convention arbitraire) la contravariance s'indique par un indice supérieur et la covariance par un indice inférieur.

Tenseurs. Toute fonction dont les composantes $A^{\overbrace{\alpha \dots \lambda}^m} \underbrace{\pi \dots \sigma}_t(x^1, x^2, \dots, x^n)$ se transforment lors d'un changement de coordonnées (x^1, x^2, \dots, x^n) en (y^1, y^2, \dots, y^n) selon la formule :

$$A'^{\overbrace{\alpha' \dots \lambda'}^m} \underbrace{\pi' \dots \sigma'}_t = A^{\overbrace{\alpha \dots \lambda}^m} \underbrace{\pi \dots \sigma}_t \frac{\partial y^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial y^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\pi}{\partial y^{\pi'}} \cdots \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^{\sigma'}} \quad (2.68)$$

est appelée **tenseur mixte de valence $m + t$, m fois contravariant et t fois covariant**.

Exemples.

- Tenseur de valence 0 (scalaire) :

$$A'(y^1, y^2, \dots, y^n) = A(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad (2.69)$$

- Tenseur de valence 1, une fois contravariant (vecteur) :

$$A^i(y^1, y^2, \dots, y^n) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad (2.70)$$

- Tenseur de valence 1, une fois covariant (gradient d'une fonction scalaire) :

$$A'_i(y^1, y^2, \dots, y^n) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} A_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad (2.71)$$

- Tenseur de valence 2, deux fois contravariant :

$$A'^{ij} = A^{\alpha\beta} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta}; \quad (2.72)$$

- Tenseur de valence 2, deux fois covariant :

$$A'_{ij} = A_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}; \quad (2.73)$$

- Tenseur mixte de valence 2, une fois contravariant et une fois covariant :

$$A'^i_j = A^\alpha_\beta \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}. \quad (2.74)$$

2.4.2 Structure géométrique de l'espace-temps

La géométrie de l'espace-temps est caractérisée par la longueur spatio-temporelle élémentaire propre :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2, \quad (2.75)$$

où ct et \vec{x} sont les coordonnées d'un événement dans un référentiel inertiel \mathfrak{R} . On introduit le tenseur symétrique η donné dans le système de coordonnées cartésiennes par

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

et défini par

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.77)$$

η est appelé **tenseur métrique** ou **tenseur de Minkowski** ou **forme fondamentale**, ou plus simplement **métrique**. Le cadre géométrique de l'espace-temps de la relativité restreinte est donc l'espace \mathbb{R}^4 muni de la métrique η définie ci-dessus. Cet espace, généralement noté (\mathbb{M}^4, η) , est appelé **espace de Minkowski**.

Si les composantes d'un objet T^μ et $T^{\mu'}$ dans deux référentiels \mathfrak{R} et \mathfrak{R}' sont reliées suivant la loi de transformation :

$$T^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu T^\nu, \quad (2.78)$$

où Λ est la matrice de Lorentz (2.43) caractérisant le changement de référentiels, alors T^μ est un quadrivecteur contravariant. Pour déterminer la loi de transformation d'un quadrivecteur covariant, on définit une nouvelle matrice par :

$$\Lambda^\sigma_{\tau'} = \eta_{\alpha'\tau'} \Lambda^{\alpha'}_\mu \eta^{\mu\sigma}. \quad (2.79)$$

Ainsi, la loi de transformation d'un quadrivecteur covariant s'écrit :

$$T_{\mu'} = \Lambda_{\mu'}^{\sigma} T_{\sigma}. \quad (2.80)$$

On en déduit que les composantes covariantes se transforment par la transposée de la matrice inverse des composantes contravariantes.

Par suite, la place des indices ne servant plus qu'à préciser si on considère des composantes covariantes ou contravariantes, il apparaît que la matrice $\eta_{\mu\nu}$ sert à baisser les indices et la matrice inverse, notée $\eta^{\mu\nu}$ à les monter.

Produit scalaire et invariants

On définit le « produit scalaire »¹⁶ de deux 4-vecteurs a et b par :

$$a \times b = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \times \vec{b} \quad (2.81)$$

$$= a^{\mu} b_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} \quad (2.82)$$

Les transformations de Lorentz ont été construites de façon à ce que le « carré scalaire »¹⁷ $a^2 = a \cdot a$ soit invariant dans un changement de référentiel. On en déduit immédiatement l'invariance du produit scalaire de deux 4-vecteurs :

$$a \times b = \frac{1}{2} \left((a + b)^2 - a^2 - b^2 \right). \quad (2.83)$$

Réciproquement, si quatre quantités a^0, a^1, a^2, a^3 se transforment de telle façon que $a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3$ soit invariant quel que soit le 4-vecteur b de composantes b^0, b^1, b^2, b^3 , alors ce sont les composantes d'un 4-vecteur a comme ci-dessus, comme on peut le vérifier en prenant pour b les quatre vecteurs d'une base de l'espace de Minkowski.

Quadrivitesse et quadriaccélération

Décrivons la trajectoire d'espace-temps d'une particule par la donnée de $x^{\mu}(s)$, où s est la longueur de la ligne d'univers parcourue par la particule mesurée entre une origine et la position courante. Nous souhaitons définir ici une notion de 4-vitesse, et la seule notion locale convenable que nous laisse l'invariance de Lorentz est

$$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (u^0, \vec{u}), \quad (2.84)$$

où τ désigne le temps propre de la particule. Il s'agit bien d'un 4-vecteur, car c'est le quotient d'un 4-vecteur par un 4-scalaire. On sait que $ds = cd\tau$, si bien que le 4-vecteur ainsi défini est tangent en chaque point à la trajectoire d'espace-temps. Puisque $\frac{v}{c} < 1$, u^{μ} pointe vers l'intérieur du cône de lumière, et en fait la trajectoire d'espace-temps est à l'intérieur du cône de lumière de chacun de ses points.

16. On s'autorise ici l'abus de langage consistant à parler de produit scalaire pour une forme quadratique qui peut être seulement non dégénérée, et non pas définie positive.

17. On s'autorise ici le même abus de langage que pour la notion de produit scalaire.

De façon analogue, on peut définir une 4-accélération par $a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau}$. Comme $u^2 = c^2 = C^{te}$, le 4-vecteur a^μ est orthogonal au 4-vecteur u^μ . Néanmoins, l'expression des composantes de a^μ dans un référentiel arbitraire est plus complexe que pour la 4-vitesse :

$$a^\mu = \left(\gamma^4 \vec{a} \cdot \vec{\beta}, \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 [\vec{a} \cdot \vec{\beta}] \vec{\beta} \right). \quad (2.85)$$

Autres exemples de quadrivecteurs

Quadrivecteur d'onde et effet Doppler. Considérons une onde d'amplitude $A = e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$. La phase de cette onde doit être un invariant puisque le fait d'être sur un maximum de l'onde ou de voir son amplitude passer par 0 est un événement qui ne dépend pas du référentiel. Les quantités $\frac{\omega}{c}$ et \vec{k} sont donc les composantes d'un 4-vecteur k^μ , le **quadrivecteur d'onde**, et on peut écrire :

$$A = e^{-ik^\mu x_\mu} \quad \text{et} \quad k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right). \quad (2.86)$$

Effet Doppler. On considère une fois de plus deux référentiels en mouvement de translation rectiligne uniforme comme sur la figure 2.1. On suppose que l'onde demeure dans le plan (Oxy) , si bien que l'expression du vecteur d'onde dans \mathfrak{R} est :

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c} \cos \theta, \frac{\omega}{c} \sin \theta, 0 \right), \quad (2.87)$$

où θ est l'angle entre le vecteur d'onde et l'axe des x . De même, dans \mathfrak{R}' , son expression est :

$$k'^\mu = \left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c} \cos \theta', \frac{\omega'}{c} \sin \theta', 0 \right). \quad (2.88)$$

Avec les notations précédentes, la transformation de Lorentz s'écrit :

$$\frac{\omega}{c} \cos \theta = \gamma \frac{\omega'}{c} (\cos \theta' + \beta); \quad (2.89)$$

$$\frac{\omega}{c} \sin \theta = \frac{\omega'}{c} \sin \theta'; \quad (2.90)$$

$$\frac{\omega}{c} = \gamma \frac{\omega'}{c} (\beta \cos \theta' + 1). \quad (2.91)$$

Effet Doppler longitudinal. L'onde est émise dans la direction de déplacement de la source, si bien que $\theta = \theta' = 0$ (il n'y a pas d'aberration telle qu'en (2.51) dans ce cas), et on obtient avec (2.89) $\omega = \gamma(1 + \beta)\omega' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\omega'$. À la limite non relativiste, on retrouve l'expression de l'effet Doppler que nous connaissons déjà : $\omega = \omega' \left(1 + \frac{v}{c}\right)$. La correction due au mouvement est du premier ordre en $\frac{v}{c}$.

Effet Doppler transversal. L'onde est émise dans une direction orthogonale à la direction de déplacement de la source (vue dans le référentiel \mathcal{R}), si bien que $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et non $\theta' = \frac{\pi}{2}$ à cause du phénomène d'aberration de (2.51)). Avec (2.89) et (2.91), on obtient $\omega = \gamma(1 - \beta^2)\omega' = \sqrt{1 - \beta^2}\omega' = \frac{\omega'}{\gamma}$. Il s'agit ici d'un phénomène nouveau, essentiellement relativiste car conséquence directe du phénomène de dilatation des durées. La correction est ici du second ordre en $\frac{v^2}{c^2}$.

L'expérience d'Ives et Stilwell. C'est historiquement la première expérience qui mesura un effet de dilatation du temps. Ives et Stilwell¹⁸ mesurèrent le changement de fréquence des lignes spectrales émises par des atomes en mouvement rapide, et trouvèrent un accord parfait avec les prédictions de la relativité restreinte. L'effet restait cependant très faible, car les vitesses des atomes ne dépassaient pas 0,5 % de la vitesse de la lumière.

Exercice : Le physicien et le feu rouge. Un physicien est arrêté pour avoir franchi un feu rouge à un croisement. Traduit devant le tribunal, il fait valoir qu'il approchait du croisement à une vitesse telle que le feu rouge lui avait paru vert. Le juge, qui était également diplômé de physique, change le motif d'accusation, et l'incolpe d'excès de vitesse ; il condamne l'accusé à une amende d'un euro par kilomètre à l'heure au-dessus de la vitesse maximale de 50 km.h^{-1} permise dans la ville. Quel est le montant de l'amende ? On rappelle les longueurs d'ondes : $\lambda_{\text{vert}} = 530 \text{ nm}$ et $\lambda_{\text{rouge}} = 650 \text{ nm}$.

Quadrivecteur densité de courant. Soient à présent ΔN particules contenues dans une boîte de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ dans le référentiel où elles sont au repos ; leur densité y est $n = \frac{\Delta N}{\Delta x \Delta y \Delta z}$. Dans le référentiel où elles ont la vitesse v , elles sont contenues dans une boîte de volume $\frac{1}{\gamma} \Delta x \Delta y \Delta z$; la densité mesurée dans ce référentiel est donc $n' = n\gamma$. En revanche, une densité 4-dimensionnelle d'événements $\frac{\Delta N}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t}$ est indépendante du référentiel, puisque l'élément de volume $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ n'est pas changé par une transformation de Lorentz (de déterminant 1).

Par suite, si \vec{v} est la vitesse des objets dont on considère la densité, alors $(c\Delta t, \vec{v}\Delta t)$ sont les composantes d'un 4-vecteur. En les multipliant par l'invariant $\frac{\Delta N}{\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t}$, on obtient le **quadrivecteur courant** $(c\rho, c\vec{v})$.

2.4.3 Dynamique relativiste

Relativité restreinte revisitée

Axiomatique. On va maintenant utiliser ce cadre géométrique pour donner un cadre axiomatique à la relativité restreinte.

Axiome 1. Le temps et l'espace sont représentés par l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de la métrique (plate) $\eta_{\mu\nu}$ de signature $(+, -, -, -)$.

Axiome 2. Dans cet espace, il existe des classes privilégiées de courbes :

18. H.E. Ives et G.R. Stilwell, J. Opt. Soc. Am. **28** (1938) 215.

1. les horloges idéales évoluent le long de courbes de genre temps et mesurent le paramètre τ (appelé **temps propre**) défini par $c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$;
2. les particules massives libres suivent des géodésiques de genre temps ;
3. les particules de masse nulle décrivent des géodésiques de genre lumière.

Le premier axiome définit la géométrie de la théorie, et le second met en place la physique. La première partie du second axiome fait la différence physique entre le temps et l'espace en définissant le temps propre ; c'est la traduction géométrique de l'hypothèse de l'horloge.

Minkowski déclarait que « *L'espace pur et le temps pur sont dorénavant condamnés à s'effacer dans l'ombre ; seule une sorte d'union des deux préservera une réalité indépendante.* » Nous savons depuis qu'il ne faut pas exagérer cet argument. S'il est en effet exact de dire qu'espace et temps sont membres inséparables d'une entité plus large, le temps n'est pas de qualité identique à l'espace, et ceci se manifeste par le signe moins de $ds^2 = c^2 dt^2 - \vec{dr}^2$, i.e. le signe de la métrique. Enfin, le fait de choisir des trajectoires de genre temps pour les particules massives est le seul choix compatible avec la causalité.

Cette formulation axiomatique a deux avantages. D'une part, elle permet de faire disparaître un certain nombre de « paradoxes » dus à des ambiguïtés dans les formulations de la relativité restreinte. Par exemple, le paradoxe des jumeaux est ramené à un banal argument géométrique : le frère le plus âgé (Casanier) est celui qui a emprunté la ligne d'univers la plus longue. Le temps écoulé pour chacun des frères (i.e. le temps propre de chacun) est, à un facteur c près, la longueur de la ligne d'univers empruntée par chacun. De plus, la formulation axiomatique permet de voir quand la relativité restreinte est une bonne approximation de la relativité générale : tant que la courbure de l'espace-temps est faible (soit pour des densités d'énergie pas trop importantes), la relativité restreinte est une excellente approximation, même pour traiter des situations où les accélérations peuvent être importantes.

Dans toute la suite, on parlera par commodité de particules, mais il ne s'agit pas forcément de particules élémentaires : les formules obtenues s'appliquent très bien à un système constitué d'un grand nombre de particules.

L'action de la particule libre relativiste massive. Nous cherchons une expression de l'action pour une particule libre relativiste massive¹⁹. C'est ce choix qui va définir complètement la dynamique de la théorie. Il ne peut être validé qu'*a posteriori*, au vu des tests expérimentaux qu'on réalisera pour mettre ses prédictions à l'épreuve.

Il est en fait déjà inclus dans l'axiomatique énoncée précédemment, mais on peut quand même essayer de deviner d'où il vient. Pour des raisons de covariance, l'action doit être un invariant relativiste. Ensuite, on voudrait retrouver l'action de la particule libre « classique » à la limite $\beta \rightarrow 0$. Enfin, lors de la discussion sur le paradoxe des jumeaux (section 2.3.2), on a remarqué que l'horloge de la particule libre parcourait le plus long chemin d'espace-temps (ou encore mesurait le temps propre le plus long).

On en déduit qu'un bon candidat est $S = \alpha \int_{\Gamma} ds$, où l'intégrale porte sur une ligne d'univers Γ , et α est une constante (invariante). Fixons un référentiel d'inertie dans

19. Le cas des particules de masse nulle sera traité plus tard.

lequel étudier le mouvement. Le Lagrangien correspondant à l'action s'écrit :

$$L = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.92)$$

soit, à la limite non-relativiste :

$$L = \alpha c - \frac{\alpha}{2c} v^2 + o\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (2.93)$$

Le premier terme ne contribue pas à la dynamique ; par contre, le deuxième terme est l'action de la particule libre Newtonienne si $\alpha = -mc$.

On postule donc que l'action de la particule libre relativiste est :

$$S = -mc \int_{\Gamma} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (2.94)$$

Notons d'ores et déjà que pour des raisons qui apparaîtront plus tard, le terme $\alpha c = mc^2$ est appelé *énergie de repos* de la particule.

Énergie et impulsion

Dans un formalisme Lagrangien, l'impulsion d'une particule est le vecteur $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$. Dans le cas présent, cela signifie :

$$\vec{p} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m \vec{v}. \quad (2.95)$$

À la limite $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, on retrouve l'expression classique de l'impulsion.

Le Lagrangien de la particule libre relativiste ne dépend pas explicitement du temps ou de la position. Dit autrement, ceci signifie que le système physique qu'il décrit est invariant par translation dans l'espace et dans le temps. Par conséquent, l'impulsion $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ est conservée en relativité restreinte, ainsi que l'énergie, définie sous la forme :

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2. \quad (2.96)$$

Cette formule montre qu'en mécanique relativiste, l'énergie d'une particule libre *ne s'annule pas* pour $v = 0$, et possède une valeur finie égale à mc^2 , ce qui justifie le nom d'*énergie de repos*. De plus, à la limite avec la mécanique classique, on retrouve :

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + o(mv^2).$$

Il est possible de combiner ces deux définitions pour exprimer l'énergie en fonction de l'impulsion :

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (2.97)$$

Pour les applications qui nous intéressent dans le cadre de ce cours, les formules précédentes, rappelées dans le tableau 2.1, sont capitales.

Impulsion	Énergie	Relation E-p	E de repos	E cinétique
$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$	$E = \gamma mc^2$	$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$	$E_0 = mc^2$	$E_c = (\gamma - 1)mc^2$

TABLE 2.1 – Minimum vital pour la physique des particules (si on n’oublie pas que $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$).

Remarque importante sur l’énergie cinétique. L’énergie cinétique E_c d’une particule relativiste ne vaut pas $p^2/2m$, mais, très logiquement, son énergie totale diminuée de son énergie de repos, soit :

$$E_c = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \quad (2.98)$$

Comment interpréter l’énergie de repos ? Tout d’abord, pourquoi ne l’a-t-on pas déjà vue ? Que se passe-t-il par exemple dans les collisions de corps macroscopiques ? Prenons par exemple deux boules de pétanque (acier inox, masse $m \simeq 700$ g, capacité calorifique $C_P \simeq 500$ J.kg⁻¹.K⁻¹) lancées frontalement l’une contre l’autre à la vitesse $v = 10$ km/s. Supposons que les deux boules s’assemblent pour former une masse compacte unique M , nécessairement au repos.

La conservation de l’énergie donne :

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = Mc^2. \quad (2.99)$$

La différence de masse entre l’état final et l’état initial est :

$$\Delta M = M - 2m = 2m(\gamma - 1) > 0. \quad (2.100)$$

Le corps formé dans la collision des boules de pétanque est donc plus lourd que les deux boules de pétanque réunies !

Il apparaît que l’énergie d’un corps au repos comporte, outre les énergies au repos des particules qui le composent, leurs énergies cinétiques et l’énergie de leurs interactions mutuelles. Autrement dit, l’énergie au repos d’un corps *n’est pas égale* à la somme des énergies au repos de ses parties constitutives, et, partant de là, la masse d’un corps *n’est pas égale* à la somme des masses de ses parties constitutives. Cela signifie qu’en mécanique relativiste, **la loi de conservation de la masse n’est pas valable**. À la place de cette loi, on trouve la loi de composition de l’énergie.

Cet effet était-il observable ? La hausse d’énergie interne correspond à un accroissement de température :

$$\Delta T = \frac{2mc^2}{mC_P}(\gamma - 1) \simeq \frac{v^2}{C_P}. \quad (2.101)$$

soit, tous calculs faits : $\Delta T \simeq 2 \times 10^5$ K ! Les boules de pétanque sont certainement complètement vaporisées lors de la collision. De toute façon, la différence de masse relative était $\frac{\Delta M}{m} = 2(\gamma - 1) \simeq 10^{-9}$...

Une très bonne balance de laboratoire, hors salle blanche, peut peser un objet avec une précision de l'ordre du microgramme. La différence de masse ΔM est de l'ordre de la précision $\epsilon \simeq 1 \mu\text{g}$ pour des vitesses $v \simeq \sqrt{\frac{\epsilon}{m}}c \simeq 11000$ m/s. C'est le bon ordre de grandeur. Malheureusement, les températures mises en jeu ne se prêtent pas du tout à l'expérimentation...

Pour chercher une vérification précise des lois de conservation, nous devons nous tourner vers le monde de la physique des particules et de la physique nucléaire. Les idées mises en jeu sont essentiellement les mêmes que celles que nous venons de développer, mais les effets sont mesurables.

Variation de l'impulsion avec la vitesse. La différence entre les expressions classique et relativiste de l'impulsion est négligeable tant que v n'est pas très grand. En mécanique newtonienne, lorsqu'une force constante agit sur un corps pendant très longtemps, le corps continue de prendre de la vitesse jusqu'à ce qu'il aille plus vite que la lumière. Ceci contredit les postulats de la relativité restreinte, et montre que ce calcul cesse d'être une bonne approximation au bout d'un certain temps. En revanche, en mécanique relativiste, où un tel résultat n'est pas possible, le corps continue de prendre non pas de la vitesse, mais de la quantité de mouvement qui, elle, peut continuellement augmenter.

La relation $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ liant l'énergie à l'impulsion a été testée de nombreuses fois. Il est cependant intéressant de noter qu'on peut la vérifier sans disposer d'un appareillage nécessairement très sophistiqué. En 1964, W. Bertozzi²⁰ a réalisé la mesure suivante. Des paquets d'électrons sont formés dans un accélérateur linéaire. On accélère les électrons jusqu'à de grandes vitesses qu'on détermine directement en chronométrant le temps mis par les électrons pour parcourir une distance connue.

Le nombre d'électrons est déterminé par la mesure de la charge électrique totale du faisceau ; l'énergie totale du faisceau est mesurée très directement par ses effets calorifiques dans un calorimètre. On peut ensuite calculer l'énergie de chaque électron. On obtient une courbe d'allure présentée figure 2.15. Cette courbe corrobore l'existence d'une vitesse limite, ainsi que la formule $E = \gamma mc^2$.

Masse relativiste. La plupart des cours anciens de relativité restreinte conservent la forme $\vec{p} = \tilde{m} \vec{v}$ de l'impulsion, où \tilde{m} est appelée *masse relativiste*, et dépend de \vec{v} de la manière suivante $\tilde{m} = \gamma m$. La masse relativiste est ainsi une grandeur qui dépend de la vitesse, et qui est exactement l'énergie à un facteur c^2 près.

On peut quasiment dire qu'il s'agit d'un archaïsme. On ne l'emploie plus pour plusieurs raisons. Notamment, on préfère une description de la masse par des propriétés plus intrinsèques d'interaction à cette variation purement cinématique. Le concept de masse relativiste fait d'ailleurs double emploi avec celui d'énergie. Enfin, il prête le flanc à des « paradoxes », ou plutôt des énoncés ambigus et intuitivement déroutants. Par

20. W. Bertozzi, Am. J. Phys. **32** (1964) 551.

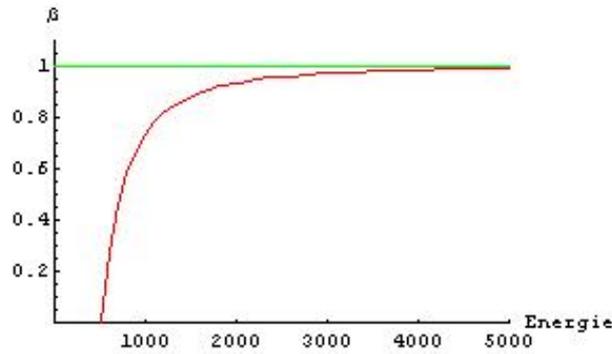


FIGURE 2.15 – Vitesse (adimensionnée) d’un électron libre en fonction de son énergie (en keV).

	4-impulsion	4-vitesse
Composante spatiale	$\gamma m \vec{v}$	$\gamma \vec{v}$
Composante temporelle	?	γc

TABLE 2.2 – Lien entre 4-vitesse et 4-impulsion.

exemple, on peut être tenté de croire que l’augmentation de l’impulsion avec la vitesse est due à une variation de la structure interne de la particule (\tilde{m} change!) alors que cette augmentation provient en réalité des propriétés géométriques de l’espace-temps lui-même.

En général, quand on parlera de masse, on parlera ici de la masse d’une particule évaluée dans son référentiel de repos. Notons qu’il est en effet possible de trouver un référentiel où une particule massive est au repos. Les formules de composition des vitesses (2.47) montrent que c’est bien le cas pour toute particule se déplaçant à une vitesse inférieure à celle de la lumière. Par ailleurs, les définitions de l’impulsion (2.95) et de l’énergie (2.96) relativistes interdisent à une particule massive de se déplacer à la vitesse de la lumière, sans quoi son impulsion et son énergie deviendraient infinies.

En résumé, on considérera ici que la masse est un invariant relativiste, tout comme la vitesse de la lumière, et à l’inverse de \tilde{m} .

Quadri-impulsion. Poursuivons notre tentative de géométrisation de la relativité restreinte, et cherchons à définir un 4-vecteur impulsion. On fait le point sur nos acquis dans le tableau 2.2.

Comme la masse est un invariant relativiste, mu^μ se transforme comme u^μ par une transformation de Lorentz, et nous pouvons définir un 4-vecteur p^μ par :

$$p^\mu = mu^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (2.102)$$

Ainsi, dans notre formalisme géométrique, l’énergie est liée à la composante tempo-

relle du 4-vecteur impulsion. Il faudra s'attendre à voir des « mélanges » entre impulsion et énergie quand on écrira les transformations de Lorentz pour avoir l'expression de l'énergie et de l'impulsion dans différents référentiels inertiels.

La norme du 4-vecteur impulsion est :

$$p^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2, \quad (2.103)$$

d'après la relation relativiste (2.97) liant l'énergie et l'impulsion. **La masse est donc la longueur de la 4-impulsion.**

Particules de masse nulle

Les résultats précédents se généralisent-ils au cas d'une particule de masse nulle ? Tout d'abord, le lagrangien (2.92) est nul à la limite $m \rightarrow 0$, ce qui représente une certaine difficulté.

Ensuite, dans cette même limite $m \rightarrow 0$, les formules (2.95) et (2.96) montrent qu'impulsion et énergie sont toutes les deux nulles, à moins que $v = c$. Ceci établit qu'une particule de masse nulle ne peut se déplacer qu'à la vitesse de la lumière. En particulier, il est impossible de trouver un référentiel dans lequel elle est au repos.

On vient donc de voir qu'**une particule se déplace à la vitesse de la lumière si et seulement si elle est de masse nulle.**

Cette difficulté de traitement des particules de masse nulle est déjà présente en mécanique newtonienne. Si on exerce une force finie sur une particule de masse nulle, l'accélération de celle-ci est infinie. De plus, la relation newtonienne entre énergie et impulsion, $E = \vec{p}^2/2m$ dit qu'une particule de masse nulle, d'énergie finie, a nécessairement une impulsion nulle !

La situation est plus satisfaisante en relativité restreinte. À la limite $m \rightarrow 0$, la relation (2.97) liant énergie et impulsion s'écrit :

$$E = pc, \quad (2.104)$$

ce qui permet d'avoir une impulsion et une énergie finie pour une particule de masse nulle.

Récapitulons ce que nous savons donc *a priori* : une particule de masse nulle se déplace nécessairement à la vitesse maximale de propagation des interactions. Son énergie E et son impulsion \vec{p} vérifient $E = pc$.

Que nous enseigne l'électrodynamique de Maxwell ? Une onde électromagnétique d'énergie E doit avoir une impulsion $\frac{E}{c}$. Cela signifie que si on associe un corpuscule (le photon !) au rayonnement lumineux, celui-ci ne peut être que de masse nulle.

La mécanique quantique admet l'existence d'un « quantum de lumière », le photon, dont l'énergie E est proportionnelle à sa fréquence ν , la constante de proportionnalité étant la constante de Planck. Si on inclut ceci dans la relativité restreinte, on voit que le photon a une impulsion $\vec{p} = \frac{h\nu}{c^2} \vec{c}$.

La relativité restreinte s'accommode de manière cohérente de cet ajout issu de la mécanique quantique. En effet, la dépendance en fréquence de l'impulsion et de l'énergie

du photon que nous venons d'introduire respecte la structure de 4-vecteur impulsion et de 4-vecteur d'onde. Supposons par exemple qu'une source émette un éclair lumineux de fréquence ν et que cette lumière soit observée par un observateur s'éloignant en droite ligne de la source avec une vitesse \vec{v} . La formule de l'effet Doppler relativiste (section 2.4.2) dit qu'il observe ce signal avec une fréquence :

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (2.105)$$

Cependant, si la source émet une énergie E , l'observateur voit une énergie :

$$E' = \gamma(E - \beta pc) \quad \text{avec} \quad pc = E \quad (2.106)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(1 - \beta)E \quad (2.107)$$

$$= E \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (2.108)$$

ce qui est compatible avec le fait que $E = h\nu$.

Quadrivecteur force et loi de Newton. Éloignons-nous maintenant d'une formulation de la dynamique en termes de principe de moindre action. Rappelons qu'en mécanique classique, la force exercée sur une particule est définie comme le produit de la masse de la particule par son accélération. À présent que l'on dispose d'une « bonne » notion d'impulsion, on peut, par analogie avec l'expression usuelle de la force, définir le **quadrivecteur force** comme la dérivée :

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = mc \frac{dv^\mu}{ds}. \quad (2.109)$$

On a ainsi :

$$f^\mu = \left(\frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{f}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (2.110)$$

Il s'avère que la composante temporelle est liée au travail de la force. Plus précisément, les composantes spatiales traduisent le principe fondamental de la dynamique, et la composante temporelle le théorème de l'énergie cinétique.

Le concept de force est peu usité en relativité. En relativité générale, la gravitation apparaît comme conséquence de la courbure de l'espace-temps, i.e. c'est un effet géométrique. Dans les théories quantiques décrivant les interactions électromagnétique, faible et forte, on part d'une description lagrangienne qui a le bon goût de donner un rôle très symétrique au rayonnement et à la matière. Il n'y a plus de force exercée sur une particule, mais des champs qui interagissent entre eux, et dont il s'agit d'étudier les équations couplées. Le formalisme de champ est particulièrement avantageux car il donne naturellement une vitesse finie de propagation des interactions, et il permet de traiter des problèmes à nombre variable (éventuellement infini) de particules.

Exercice : Exemples de limites de la mécanique newtonienne. On admet que la vitesse $\beta = \frac{1}{7}$ est une valeur approchée de la vitesse d'une particule au-delà de laquelle la mécanique classique ne s'applique plus. L'analyse classique est-elle valable dans les cas suivants ?

- Un satellite en orbite autour de la Terre à la vitesse de 29 000 km/h ?
- La Terre en orbite autour du Soleil à la vitesse de 30 km/s ?
- Un électron sur l'orbite de plus faible rayon de l'atome d'hydrogène ?
- Un électron sur une orbite interne de l'atome d'or ?
- Un électron possédant une énergie cinétique de 5000 eV ?
- Un proton ou un neutron possédant une énergie cinétique de 10 MeV ?

On admettra que la vitesse d'un électron sur une orbite intérieure d'un atome contenant Z protons est $v = \frac{Z}{137}c$ avec une précision suffisante dans le cas de vitesse faible. Comment justifier cette formule ? Vous utiliserez le principe d'incertitude de Heisenberg, en remarquant que $\frac{1}{137}$ est la valeur de la **constante de structure fine** α , définie par $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$.

2.5 Application aux collisions de particules

La cinématique des collisions de particules s'étudie, comme en mécanique classique, en appliquant les **lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement**. Dans la plupart des cas, ces lois ne permettent pas de tout prédire. Les probabilités qu'une collision ait lieu et produise des particules ayant des propriétés données sont alors décrites quantitativement par la notion de **section efficace** que nous décrirons après avoir dressé le bilan énergétique d'une collision de particules.

2.5.1 Bilan énergétique

Avant de donner quelques exemples concrets, introduisons la notion de **seuil de réaction**. C'est l'énergie minimale dont il faut disposer pour qu'une réaction donnée puisse avoir lieu. Elle découle naturellement du résultat suivant, établi pour une population finie quelconque de particules.

Considérons un système de N particules de quadri-impulsion p_i et de masse m_i . Si nous nous plaçons dans \mathfrak{R}_k , référentiel de repos de la particule k , nous avons $p_k = (m_k c, \vec{0})$ et $p_j = (\frac{E_j}{c}, \vec{p}_j)$ pour $j \neq k$. Comme $E_j = \sqrt{m_j^2 c^4 + \vec{p}_j^2 c^2} \geq m_j c^2$, il vient que le produit scalaire $p_k \cdot p_j = m_k E_j \geq m_k m_j c^2$. Puisque les deux membres de cette inégalité sont des invariants de Lorentz, ce résultat est vrai dans tout référentiel d'inertie, et pas seulement dans le seul référentiel \mathfrak{R}_k . En particulier, pour tous i et j et dans tous les référentiels, nous avons $p_i \cdot p_j \geq m_i m_j c^2$. Comme $p^2 = (\sum_{i=1}^N p_i)^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq N} p_i \cdot p_j$, il apparaît que la quadri-impulsion totale $p = \sum_i p_i$ vérifie :

$$\sqrt{p^2} \geq \sum_{i=1}^N m_i c. \quad (2.111)$$

Ce résultat est fondamental : **La norme de la quadri-impulsion totale d'un système est supérieure à la somme des masses de ses constituants, et ce dans tous les référentiels d'inertie.** La notation consacrée pour cette norme dans la littérature de physique des particules est $\sqrt{s}(= \sqrt{p^2})$.

Applications

Si maintenant les N particules considérées sont les produits d'une collision ou d'une désintégration, la quadri-impulsion totale p du système des particules produites vaut, par conservation, la somme de celles des particules initiales. Si l'inégalité ci-dessus n'est pas vérifiée, les particules dans l'état considéré ne pourront pas être produites lors d'une même collision ou d'une désintégration.

Dans le cas d'une désintégration $a \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ nous avons $\sqrt{p^2} = m_a c$, où m_a est la masse de la particule mère. Il s'en suit que **la somme des masses des particules filles est inférieure à la masse de la particule mère.**

Dans le cas d'une collision $a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ nous avons $p = p_1 + p_2$. Prenons l'exemple d'un faisceau 1 agissant sur une cible fixe 2. Dans le référentiel du laboratoire $\vec{p}_2 = \vec{0}$. Nous obtenons :

$$p^2 = \left(\frac{E_1}{c} + m_2 c \right)^2 - \vec{p}_1^2 = (m_1^2 + m_2^2) c^2 + 2m_2 E_1. \quad (2.112)$$

D'après l'équation 2.111, une réaction produisant N particules de masse m_i ne sera ainsi possible que si :

$$E_1 \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^N m_i \right)^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2} c^2 \quad (2.113)$$

qui est donc **l'énergie de seuil de réaction**, pour des collisions sur cible fixe et dans le référentiel du laboratoire. Dans ce cas, p^2 varie linéairement avec l'énergie du faisceau.

Dans le cas d'un collisionneur, où les réactions sont créées par **deux faisceaux d'impulsions égales et opposées**, nous avons $\sum \vec{p}_i = \vec{0}$ et $p^2 c^2 = (E_1 + E_2)^2$. La quantité p^2 varie comme le carré de l'énergie des faisceaux. Un collisionneur est donc beaucoup plus efficace pour accéder à de très hautes énergies, par exemple pour créer de nouvelles particules de masse élevée.

Exemples. Les bosons intermédiaires des interactions faibles W et Z ont été découverts dans les années 80 à l'aide d'un collisionneur proton-antiproton au CERN. L'énergie de chacun des faisceaux était de 270 GeV, soit $p^2 = (540 \text{ GeV})^2$. Pour obtenir les mêmes réactions sur une cible de protons au repos, il aurait fallu, d'après l'équation 2.112, donner aux antiprotons une énergie de $E_1 \sim p^2/2m_p \sim 155\,000 \text{ GeV}$, énergie que les accélérateurs actuels ne peuvent pas atteindre²¹ !

21. Les énergies aujourd'hui accessibles sont de l'ordre du TeV.

Le collisionneur HERA qui fonctionne à Hambourg produit des collisions entre des protons d'énergie $E_p = 800$ GeV et des électrons d'énergie $E_e = 30$ GeV ; ce qui correspond à $p^2 = 96\,000$ (GeV/c)². Pour obtenir la même valeur de p avec une cible de protons au repos, il aurait fallu donner aux électrons une énergie de $E_e \sim \frac{p^2}{2m_p} \sim 51\,200$ GeV.

Exercice : électrons accélérés. L'accélérateur linéaire de Stanford (figure 2.16) était prévu pour accélérer des électrons et leur donner une énergie cinétique finale de 40 GeV ; ces électrons servent à des expériences sur les particules élémentaires. Des ondes électromagnétiques produites dans de grands tubes à vide appelés **klystrons** accélèrent les électrons dans un long conduit rectiligne d'environ trois kilomètres de long.



FIGURE 2.16 – L'accélérateur linéaire de Stanford, vue aérienne (à gauche). Un klystron (à droite).

1. Les électrons observés dans le système du laboratoire voient leur énergie cinétique augmenter d'une quantité à peu près constante à chaque mètre de tube parcouru. Quel est ce gain d'énergie en MeV/m ? En admettant que l'expression newtonienne de l'énergie cinétique soit correcte, quelle serait la longueur du trajet parcouru par l'électron dans l'accélérateur avant qu'il atteigne la vitesse de la lumière ?
2. Bien entendu, les électrons qui sortent avec une énergie de 40 GeV à l'extrémité de l'accélérateur ont une vitesse β inférieure à celle de la lumière. Quelle est la valeur de la différence $1 - \beta$ entre la vitesse de la lumière et celle de ces électrons ? Si un de ces électrons et un éclair lumineux faisaient la course dans un tube à vide d'un kilomètre de long, quelle serait l'avance prise par l'éclair à la fin du parcours ? Exprimer cette réponse en millimètres.
3. Quelle est la longueur de *l'accélérateur de trois kilomètres* vue depuis un système mobile se déplaçant parallèlement à l'électron et en sortant et à la même vitesse ?

Exercice : Collisions newtonienne et relativiste. Un proton A diffuse sur un proton B initialement au repos ($A + B \rightarrow A + B$). On ne peut prédire quel sera le résultat de cette rencontre. Il dépend de la proximité des particules qui se rencontrent. Dans la plupart des cas, le proton A sera seulement dévié d'un petit angle θ_A par rapport à la direction de son mouvement initial. Le proton B recevra seulement une légère impulsion latérale qui fera un angle θ_B voisin de 90° par rapport à la direction vers l'avant. Mais il arrive de temps à autre que les particules passent plus près l'une de l'autre, et B prend alors à peu près toute l'énergie de A et s'en va selon un angle θ_B très faible par rapport à la direction initiale.

1. Entre ces deux extrêmes, on trouve parfois une collision symétrique, à l'issue de laquelle les deux particules identiques s'éloignent à la même vitesse sur des trajectoires qui font le même angle $\theta_A = \theta_B = \frac{\theta}{2}$. Quelle est la valeur de l'angle de déviation dans une collision symétrique ?
2. Selon la mécanique newtonienne, l'angle total entre A et B est égal à 90° pour toute collision élastique, qu'elle soit symétrique ou non. Que cet angle puisse être inférieur à 90° dans une collision rapide est l'une des prévisions les plus intéressantes et les plus décisives de la relativité. La différence entre l'angle total de séparation et un angle droit donne une mesure commode des écarts par rapport à la mécanique de Newton. Quelle vitesse faudrait-il atteindre dans une expérience de collision de ce genre avant que l'angle des trajectoires s'écarte de l'angle droit de plus d'un centième de radian ? On traitera le cas d'une particule entrant en collision avec une particule au repos, et celui de deux particules animées de la même vitesse.

2.5.2 Sections efficaces totales

Jusqu'ici nous ne nous sommes intéressés qu'aux propriétés cinématiques des particules issues d'une collision, mais pas aux probabilités qu'une collision ait lieu et produise telle ou telle particule. La quantité intéressante pour décrire ces probabilités part d'une idée de départ assez intuitive. Si nous nous intéressons au tir à l'arc par exemple, nous comprenons que la probabilité qu'une flèche tirée au hasard touche la cible est proportionnelle à la surface de la cible.

On appelle **section efficace** la quantité traduisant la probabilité d'interaction. Elle a les dimensions d'une surface. Par exemple, la probabilité qu'une particule (une flèche) x interagisse en traversant une enceinte cubique de rayon l remplie de N particules cibles y (donc de densité $\rho = N/l^3$) vaudra : $\sigma_{xy}l\rho = \sigma_{xy}N/l^2$, où σ_{xy} est la section efficace totale d'interaction d'une particule x avec une particule y . Dans le cas d'une flèche considérée comme ponctuelle et d'une cible, elle vaut simplement la surface de la cible.

Commençons par modéliser les particules d'un faisceau comme des **sphères dures** de rayon r_1 et envoyons-les sur une cible de particules de rayon r_2 . La probabilité d'interaction est proportionnelle à $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$, car il suffit que les centres des particules passent à une distance inférieure à $r_1 + r_2$ l'un de l'autre pour qu'elles se percutent. Ainsi, si les protons étaient des sphères dures de rayon un fermi, leur section efficace d'inter-

action mutuelle serait de $1,3 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$. Dans le cas d'électrons, que l'on peut considérer comme ponctuels, interagissant sur des protons, la section efficace serait $\pi \text{ fm}^2$.

Pour des particules chargées, une meilleure approximation consiste à décrire l'interaction par un potentiel coulombien. Nous verrons l'exemple de la **diffusion Rutherford** à la fin de cette section.

En physique des particules, le calcul complet des sections efficaces est complexe et dépasse le cadre de ce cours. Nous retiendrons seulement que :

- il ne s'agit jamais de collision de sphères dures ;
- la section efficace dépend *a priori* de l'énergie mise en jeu ;
- la section efficace dépend fortement des interactions mises en jeu et par conséquent de la nature des particules cible et projectile. Par exemple, des électrons interagiraient différemment avec un proton, un neutron, un pion ou un neutrino.

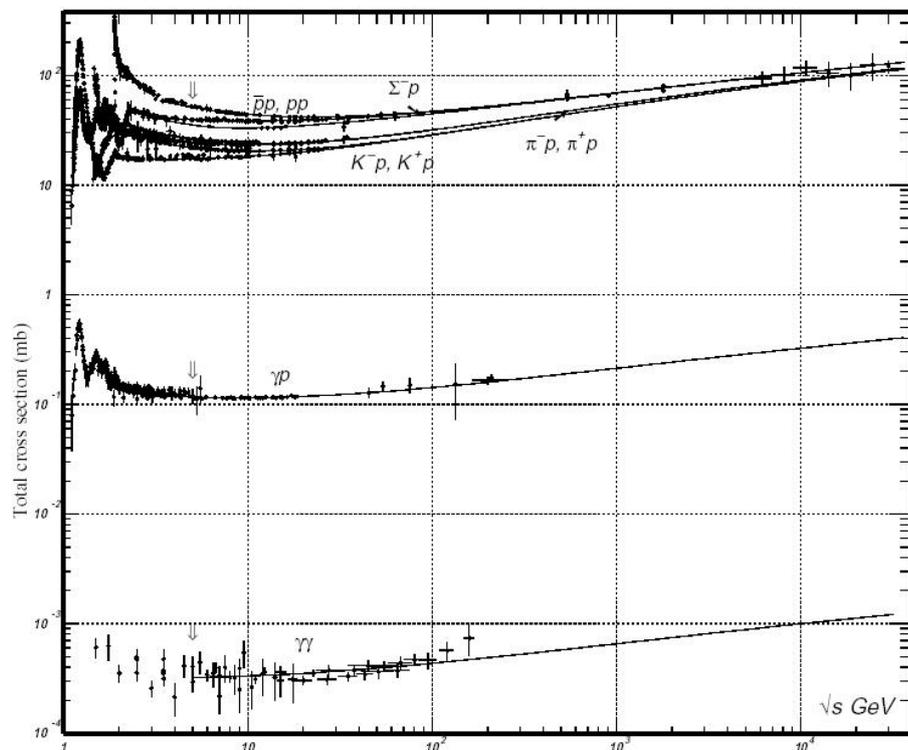


FIGURE 2.17 – Sections efficaces (en millibarns) d'interaction de quelques particules usuelles en fonction de l'énergie (en GeV) dans le référentiel du centre de masse.

Il est donc crucial de définir précisément la collision considérée et l'énergie mise en jeu pour calculer une section efficace. La figure 2.17 montre des mesures de section efficace d'interaction de différentes particules, en fonction de la norme de la quadri-impulsion initiale ($\sqrt{s} = \sqrt{p^2}$) en GeV. L'unité usuelle de section efficace est le **barn** qui vaut 10^{-28} m^2 .

Remarquons que la section efficace d'interaction de deux protons vaut quelques dizaines de millibarns, soit quelques 10^{-30} m^2 , dix fois moins que ce qu'elle serait si les protons étaient des sphères dures d'un fermi de rayon. Remarquons également que les

sections efficaces dépendent fortement de la nature des particules, sur cinq ordres de grandeur sur les exemples de la figure.

Nous pouvons aussi restreindre la section efficace considérée à une fraction des états finals disponibles. Nous distinguerons alors les sections efficaces :

- **totales ou inclusives** : tous les états finals sont considérés. Par exemple, $\sigma_{pp}^{tot} \sim 40$ mb à 200 GeV ;
- **élastiques** : la nature des particules entrant en collision n'est pas modifiée ; nous retrouvons les mêmes particules dans l'état final. σ_{pp}^{elas} se limite par exemple à 7 mb et correspond à la réaction de diffusion $p + p \rightarrow p + p$;
- **inélastiques** : les particules changent de nature, et éventuellement de nombre. Par exemple, un électron percutant un proton à assez haute énergie peut détruire la structure du proton et faire fragmenter celui-ci en plusieurs hadrons. Dans notre exemple, $\sigma_{pp}^{inel} = \sigma_{pp}^{tot} - \sigma_{pp}^{elas} \sim 33$ mb ;
- **exclusives** : on se limite à un état final précis, contenant des particules filles spécifiques. Par exemple, la section efficace de production d'un méson J/ψ (accompagnée de n'importe quelles autres particules) dans les collisions proton-proton n'est plus que de $2,6 \mu\text{b}$, et correspond à $p + p \rightarrow J/\psi + \dots$

Examinons maintenant la dépendance de la section efficace avec l'énergie mise en jeu dans la collision. Naïvement, nous nous attendons à ce que la section efficace soit croissante avec le temps passé par la particule incidente au voisinage de la cible, et ainsi décroissante avec la vitesse, donc avec l'énergie. C'est essentiellement vrai pour un processus donné, mais des processus nouveaux peuvent apparaître à certaines énergies, comme au voisinage des résonances (définies page 6), niveaux d'énergie particuliers où les particules incidente et cible interagissent pour former un état lié (une particule) de durée de vie très courte. C'est d'ailleurs cette remarque qui a permis de découvrir un grand nombre de résonances, en traçant les courbes mesurant la section efficace en fonction de l'énergie de la collision. Un exemple est donné par la figure 2.18, où l'on constate l'augmentation de la section efficace $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ au passage des résonances ρ , ω , ϕ (contenant des quarks étranges), du J/ψ et du ψ' (états liés de quarks $c\bar{c}$), des Υ (états liés de quarks $b\bar{b}$) et du boson médiateur des interactions faibles Z^0 .

Enfin, **la section efficace totale est un invariant relativiste**, puisqu'elle représente une probabilité. Elle peut être calculée dans n'importe quel référentiel inertiel.

2.5.3 Sections efficaces différentielles

Jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas préoccupés des impulsions des particules filles. Prenons l'exemple des collisions (élastiques) électron-proton en mécanique classique. Lorsque l'électron incident ressent le potentiel de Coulomb du proton, il est dévié d'un angle θ . Cet **angle de diffusion** est une fonction du **paramètre d'impact** b , distance qui aurait séparé la particule incidente de l'origine du potentiel de diffusion si elle avait poursuivi sa trajectoire initiale. En général, l'angle de diffusion est d'autant plus grand que le paramètre d'impact est petit, mais la forme explicite de $\theta(b)$ dépend bien entendu de la forme particulière du potentiel considéré. Si la particule incidente arrive avec un paramètre d'impact b à db près, elle sera diffusée entre θ et $\theta + d\theta$.

Plus généralement, si elle arrive en passant à travers une aire infinitésimale $d\sigma$ (par

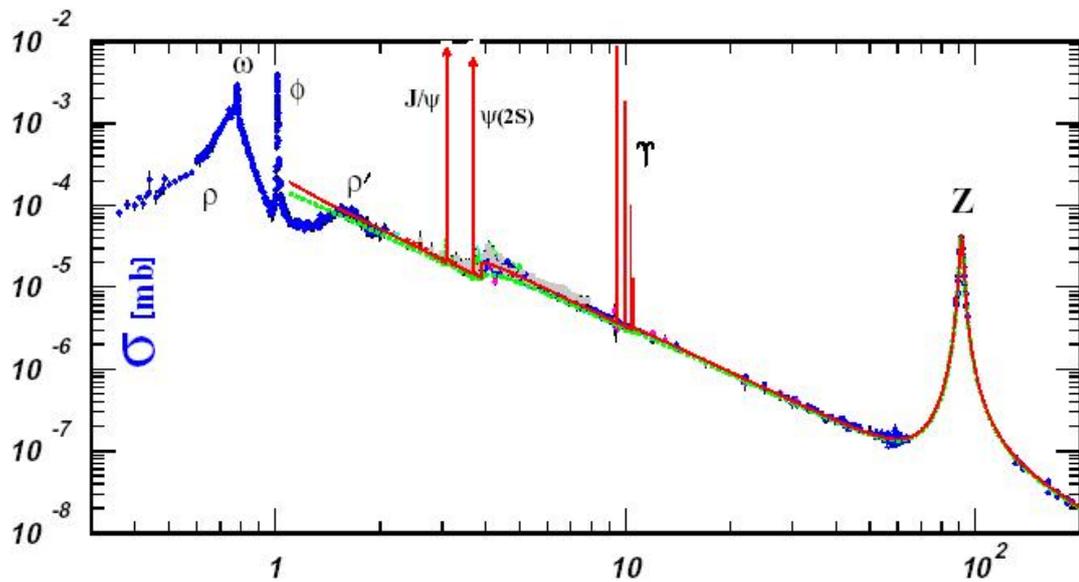


FIGURE 2.18 – Sections efficaces $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ en fonction de l'énergie en GeV.

exemple $d\sigma = 2\pi b db$), elle sera diffusée dans un angle solide $d\Omega$. Naturellement, plus $d\sigma$ est grand et plus $d\Omega$ sera grand aussi. Le facteur de proportionnalité $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ est par définition la **section efficace différentielle** et vérifie $d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$. Elle dépend *a priori* du paramètre d'impact. En intégrant $\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$, nous devons retrouver la **section efficace totale**.

Dans les expériences de physique des particules, nous ne mesurons pas le paramètre d'impact, mais nous pouvons mesurer la distribution des particules filles pour un grand nombre de collisions, et en dresser la population statistique.

Soit x_1, \dots, x_n , un choix de variables cinématiques indépendantes. On exprime alors la **probabilité que la collision produise les particules filles avec des impulsions correspondantes à ces variables indépendantes** par une section efficace différentielle $\frac{d\sigma(x_1, \dots, x_n, \sqrt{s})}{dx_1 \dots dx_n}$. Notons que cette section efficace dépend toujours de l'énergie initiale mise en jeu $\sqrt{s} = \sqrt{p^2}$. Notons également que puisqu'elle dépend explicitement de variables cinématiques qui se transforment par changement de référentiel, **elle n'est pas un invariant relativiste**. Il est donc important lorsque l'on parle d'une section efficace différentielle de préciser le référentiel dans laquelle on l'exprime.

Le nombre de variables cinématiques indépendantes dépend du nombre de particules produites. Si la section efficace est exprimée en fonction d'autant de variables qu'il y a d'inconnues, on parle de section efficace **totalemment différentielle**, et cette fonction décrit complètement le résultat du processus considéré.

Dans bien des cas, on ne s'intéresse pas à toutes les variables cinématiques. On parlera alors de section efficace **partiellement différentielle**. Nous pouvons obtenir les sections efficaces partiellement différentielles en intégrant la section efficace totalement différentielle sur les variables qui ne nous intéressent pas.

Regardons quelques exemples :

- **Pour une collision produisant deux particules** $a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2$, il y a six inconnues (les impulsions des particules filles) pour quatre équations de conservation, soient deux variables indépendantes. On peut par exemple prendre les angles θ et ϕ d'une des particules filles. Remarquons que la réaction a lieu dans un plan. Ce plan contient les impulsions initiales, mais son deuxième axe est *a priori* quelconque²². Autrement dit, la section efficace ne dépend pas de l'angle ϕ de la particule, et on a tout intérêt à l'intégrer :

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\theta d\phi} d\phi = 2\pi \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\theta}. \quad (2.114)$$

- **Pour une collision produisant trois particules** $a_1 + a_2 \rightarrow b_1 + b_2 + b_3$, il y a cinq variables indépendantes. On peut par exemple choisir les angles θ et ϕ des deux premières particules et l'énergie de la troisième. Ce choix peut s'avérer judicieux dans le processus $p + p \rightarrow p + p + \gamma$. Si on ne s'intéresse qu'à l'énergie du photon émis, on pourra intégrer sur les quatre autres paramètres :

$$\frac{d\sigma(E_\gamma)}{dE_\gamma} = \int \int \int \int \frac{d\sigma(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2, E_\gamma)}{d\theta_1 d\phi_1 d\theta_2 d\phi_2 dE_\gamma} d\theta_1 d\phi_1 d\theta_2 d\phi_2. \quad (2.115)$$

- Si en dernier recours, nous intégrons sur toutes les variables cinématiques, nous retompons sur la section efficace totale :

$$\sigma(\sqrt{s}) = \int \dots \int \frac{d\sigma(x_1, \dots, x_n, \sqrt{s})}{dx_1 \dots dx_n} dx_1 \dots dx_n. \quad (2.116)$$

Comme nous l'avons déjà dit, le calcul des sections efficaces sort du cadre de ce cours. Il nécessite un arsenal de théorie quantique des champs conséquent. En guise d'exemple, voici l'expression de la section efficace totalement différentielle du processus $e^- + p \rightarrow e^- + p$ de diffusion élastique d'un électron d'énergie E par un proton considéré comme ponctuel initialement au repos :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha \hbar c}{2E} \right)^2 \frac{E'}{E} \left(\cot^2 \frac{\theta}{2} + \frac{2EE'}{M^2 c^4} \right), \quad (2.117)$$

où nous avons négligé la masse de l'électron et où M est la masse du proton, $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ la constante de l'interaction électromagnétique, θ l'angle de diffusion de l'électron et E' l'énergie de l'électron diffusé vérifie : $E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{Mc^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$.

Cette section efficace est deux fois différentielle ($d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$) et ne dépend que de θ . Elle nous donne la distribution d'un électron diffusé par un proton ponctuel. Un écart expérimental à cette loi fut ce qui permit de découvrir que le proton n'était précisément pas ponctuel.

22. Il peut ne pas l'être si les particules initiales ont été préparées avec des spins particuliers.

Exercice : Modèle des sphères dures. Nous considérons une collision élastique de particules sur une cible sphérique de rayon R . Nous notons b le paramètre d'impact et θ l'angle de diffusion.

- Montrer que $b = R \cos \frac{\theta}{2}$.
- Prouver que $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$.
- En déduire que $\sigma = \pi R^2$.

Exercice : Diffusion Rutherford. Une particule de charge q_1 interagit avec une particule cible immobile de charge q_2 . En mécanique classique, le paramètre d'impact b est relié à l'angle de diffusion θ selon $b = \frac{q_1 q_2}{2E} \cot \frac{\theta}{2}$ où E désigne l'énergie cinétique de la charge incidente.

- Vérifier que $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1 q_2}{4E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2$.
- En déduire que la section efficace totale est infinie. À quoi est-ce dû ?

Chapitre 3

Mécanique quantique

Objectifs du chapitre. *Nous rappellerons ici quelques éléments de mécanique quantique, tels qu'ils sont exposés dans le cours de physique de première année, en les illustrant par quelques exemples tirés de la physique des particules. Dans un premier temps, nous verrons comment les particules se comportent parfois comme des ondes, et parfois comme des corpuscules. Nous établirons et interpréterons les équations d'ondes qui les régissent. Ceci fait, nous mesurerons diverses quantités sur ces particules et nous nous attarderons en particulier sur le moment cinétique. Pour conclure, nous insisterons sur la notion de spin, une caractéristique intrinsèque et purement quantique des particules élémentaires.*

3.1 Dualité onde-corpuscule

3.1.1 Principe

Les objets physiques peuvent être classés en deux grandes catégories : les ondes et les corpuscules.

Un **corpuscule** est caractérisé par une impulsion \vec{p} et une énergie E . L'énergie d'un corpuscule libre s'écrit : $E = \frac{p^2}{2m}$ en mécanique classique ou $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ en relativité restreinte (équation 2.97).

Une **onde** (monochromatique et plane) est quant à elle caractérisée par une amplitude évoluant dans le temps et l'espace, en suivant une pulsation ω et un vecteur d'onde \vec{k} : *Amplitude* $\propto \sin(\omega.t + \vec{k}.\vec{x})$

À la fin du dix-neuvième siècle, **la lumière** semble se comporter parfois comme un corpuscule, parfois comme une onde. Des expériences de l'époque permettent de révéler l'un ou l'autre de ces aspects :

- **corpusculaire**, avec la loi de la réflexion à angle constant, énoncée par Descartes et ressemblant furieusement à celle qu'on observe lors du rebondissement d'une balle de tennis (frappée sans effet), mais également avec la loi de la réfraction si tant est que l'on admette que la vitesse de la lumière dépend du milieu qu'elle traverse ;
- **ondulatoire**, avec les phénomènes d'interférence et de diffraction, énoncés par

Huygens et Fresnel et dont l'exemple le plus marquant, sinon le plus commun est l'expérience des fentes d'Young.

Un des piliers de la mécanique quantique réside dans la compréhension que ces deux aspects sont liés. Ainsi, à tout objet quantique, on peut associer soit une onde, soit un corpuscule, le choix entre ces deux possibilités dépendant de l'expérience que l'on est en train de réaliser.

La correspondance entre les deux aspects est donnée par les expressions suivantes :

$$E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (3.1)$$

La constante de proportionnalité $\hbar = h/2\pi$ est la quantité fondamentale de la mécanique quantique, dont la première apparition est due à Planck qui en eut besoin pour expliquer le spectre du rayonnement des corps noirs par des échanges discrets d'énergie $E = h\nu (= \hbar\omega)$.

$$h = 6,626069 \times 10^{-34} \text{J.s} \quad \hbar = h/2\pi \simeq 10^{-34} \text{J.s} \quad (3.2)$$

Dans notre système d'unités (Cf. annexe C), ceci correspond à :

$$\hbar = h/2\pi = 6,58212 \cdot 10^{-22} \text{MeV.s} \quad (3.3)$$

Historiquement, les expressions 3.1 furent d'abord découvertes pour la lumière afin d'expliquer les effets photoélectrique (1905) et Compton (1923). En 1923, Louis de Broglie propose dans sa thèse de doctorat de généraliser : à toute particule d'impulsion \vec{p} est associée une onde de longueur $\lambda = h/|\vec{p}| (= 2\pi/|\vec{k}|)$. En 1927, l'expérience de Davisson et Germer vient confirmer l'hypothèse dans le cas des électrons. Louis de Broglie décroche alors le prix Nobel de physique (1929).

Les trois paragraphes suivants sont dédiés à la description succincte des expériences historiques qui illustrent bien la dualité onde-corpuscule.

3.1.2 L'effet photoélectrique

Découvert en 1887 par Hertz, cet effet fut expliqué par Einstein en 1905.

Il s'agit d'éclairer divers métaux avec de la lumière. Pour des fréquences basses, il ne se passe rien, même si l'expérimentateur éclaire longtemps et avec grande intensité. En revanche, dès qu'il atteint une certaine fréquence ν_0 , des électrons sont soudainement émis, et ce même si l'éclairement est court et faible.

L'explication que donne Einstein est que la lumière contient des grains élémentaires d'énergie proportionnelle à sa longueur d'onde. Pour éjecter un électron du métal, il faut atteindre une énergie, donc une longueur d'onde, suffisamment grande pour vaincre les forces qui le lient au métal. Ceci permet d'expliquer l'effet de seuil en fréquence observé.

L'éventuel excédent d'énergie des grains de lumière est alors converti en énergie cinétique de l'électron. La mesure de celle-ci permet de quantifier le rapport entre la fréquence et l'énergie des grains. Expérimentalement, on trouve $E_c = h(\nu - \nu_0)$. La constante qui intervient ici est la même que celle de Planck pour le corps noir.

Conclusion : la lumière est faite de corpuscules capables de communiquer une énergie $E = h\nu$ à d'autres corpuscules, comme les électrons. Sont ainsi reliés un aspect purement ondulatoire, la fréquence, à un aspect purement corpusculaire : l'énergie. Ces *grains de lumières* furent baptisés **photons** par Lewis en 1926.

Anecdote : Après avoir lu notre chapitre précédent, dans lequel Einstein s'est illustré en formalisant la relativité restreinte, vous serez peut-être surpris d'apprendre qu'il n'a pas eu le prix Nobel pour ça. Einstein écrivit en 1905 trois articles essentiels : les fondations de la relativité restreinte ($E = mc^2$), l'explication de l'effet photoélectrique et le mouvement brownien. En 1916, il élabore également la relativité générale. Les deux relativités sont des innovations capitales de la physique, mais en 1921, le comité Nobel décerne son prix à Einstein *pour ses contributions à la physique théorique, et en particulier pour sa découverte de la loi de l'effet photoélectrique.*

Exercice : Étudier l'effet photoélectrique sur le potassium, dont les électrons ont des énergies de liaison d'environ 2 eV.

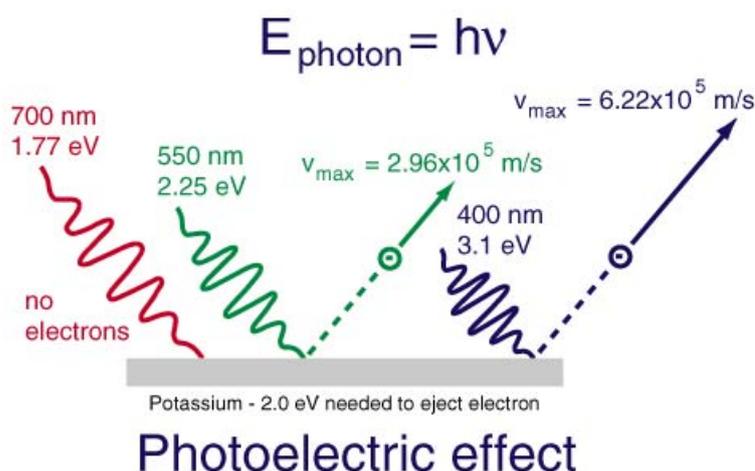


FIGURE 3.1 – L'effet photoélectrique sur des électrons possédant une énergie de liaison de 2 eV.

Solution : L'énergie de liaison correspond à une fréquence de seuil $\nu_0 = E_0/h = 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} / 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,8 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ et donc à des longueurs d'onde de $\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} / 4,8 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1} = 625 \text{ nm}$, en plein dans le domaine visible ! Ainsi, si on envoie de la lumière rouge ($\lambda = 700 \text{ nm}$, $\nu = 4,3 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$) sur du potassium, il ne se passe rien. Si on envoie du vert ($\lambda = 550 \text{ nm}$, $\nu = 5,4 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$), des électrons sont arrachés avec une énergie cinétique $E_c = h(\nu - \nu_0) = 0,38 \cdot 10^{-19} \text{ J} \sim 0,2 \text{ eV}$, soit une vitesse non-relativiste de $v = \sqrt{2E/m} = 2,96 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. Pour du bleu ($\lambda = 400 \text{ nm}$, $\nu = 7,5 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$), les électrons arrachés ont une énergie de 1,1 eV et une vitesse toujours non-relativiste de $6,22 \cdot 10^5 \text{ m/s}$.

3.1.3 L'effet Compton

Il s'agit cette fois de l'éjection d'un électron, initialement au repos, par un photon. Cet effet fut observé et expliqué en 1922 par Compton.

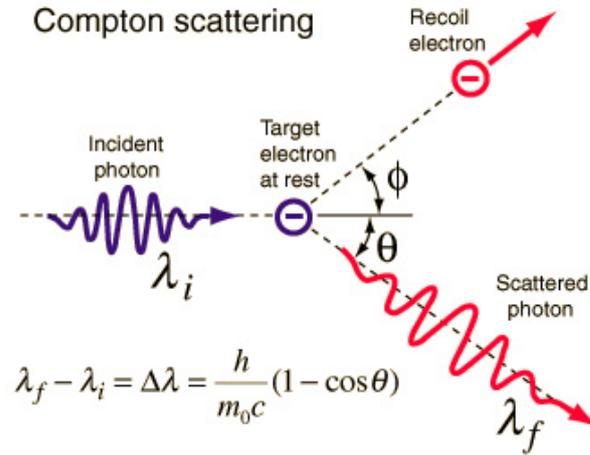


FIGURE 3.2 – L'effet Compton. Un photon incident de longueur d'onde λ_i éjecte un électron en changeant de longueur d'onde.

Écrivons la conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$\begin{aligned} E_i + e_i &= E_f + e_f \\ P_i &= P_f \cos \theta + p_f \cos \phi \\ 0 &= P_f \sin \theta + p_f \sin \phi, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les minuscules concernent l'électron et les majuscules le photon, les indices i et f correspondant aux instants initial et final. Écrivons aussi les équations relativistes :

- $e_f^2 = (p_f c)^2 + m_e^2 c^4$ et $e_i = m_e c^2$ pour l'électron initialement au repos,
- $E_i = P_i c$ et $E_f = P_f c$ pour le photon de masse nulle.

En résolvant ce système d'équations, on peut exprimer l'énergie du photon diffusé en fonction de son énergie initiale et de l'angle vers lequel on regarde :

$$E_f = \frac{E_i}{1 + \frac{E_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}. \quad (3.5)$$

Jusqu'ici, notre approche est uniquement corpusculaire. Si, après avoir vu l'effet photoélectrique, on croit à la dualité onde-corpuscule, on peut en déduire la longueur d'onde associée à l'équation précédente $\lambda_f = hc/E_f$:

$$\lambda_f = \lambda_i + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (3.6)$$

En faisant effectivement l'expérience, on observe bien cette variation de longueur d'onde $\lambda_f - \lambda_i \propto (1 - \cos \theta)$. Le coefficient de proportionnalité est baptisé **longueur**

d'onde de Compton de l'électron et vaut $\lambda_c = h/m_e c = 2,4 \cdot 10^{-12}$ m. Elle est caractéristique des ondes qu'il faut envoyer sur un électron pour qu'elles soient significativement déviées par celui-ci. Si $\lambda \gg \lambda_c$, l'onde ne voit pas l'électron.

Ce n'est pas parce que nous avons fait apparaître cette longueur d'onde caractéristique de l'électron que nous avons pour autant révélé son aspect ondulatoire, tel que Louis de Broglie le prédit en 1923, juste après la découverte de l'effet Compton. En effet, pour démontrer la formule 3.6, nous n'avons fait appel à aucun aspect ondulatoire associé à l'électron. Dans l'effet Compton, l'électron se comporte en corpuscule, seul le photon révèle ses aspects corpusculaire et ondulatoire.

Notez également que notre approche ne permet pas de prédire les angles θ auxquels les photons vont être diffusés. Nous avons trop d'inconnues pour pas assez d'équations. Pour en savoir plus, il faut connaître les mécanismes d'interaction entre photon et électron.

3.1.4 Aspect ondulatoire de l'électron

En 1927, Davisson et Germer montrent l'aspect ondulatoire d'une particule de matière : l'électron. Ils réalisent une expérience de diffraction d'électrons par réflexion sur un cristal atomique, de nickel en l'occurrence.

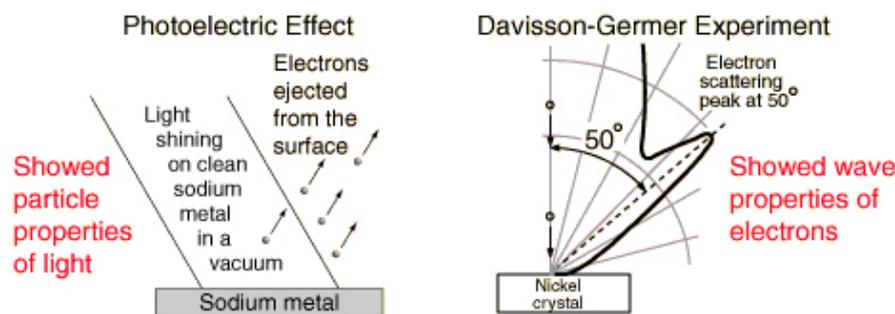


FIGURE 3.3 – Dans l'effet photoélectrique, des photons révèlent leur caractère corpusculaire. Dans l'expérience de Davisson et Germer, des électrons sont diffractés par un cristal dans des directions angulaires précises, révélant ainsi qu'ils peuvent se comporter en onde.

Pour obtenir des interférences constructives, il faut que la différence de marche de l'onde diffusée par deux sites du cristal, distants de d , soit un multiple de la longueur d'onde. Les franges visibles se trouveront parallèles aux directions cristallines, à des angles θ_n tels que :

$$d \sin \theta_n = n\lambda \quad (3.7)$$

Si on en croit Louis de Broglie, l'impulsion des électrons est liée à leur longueur d'onde par $p = h/\lambda$. Pour voir des interférences, il faut évidemment que $\sin \theta_1$ soit plus petit que 1, soit $\lambda < d$ et donc $p > h/d$. Comment obtenir des électrons d'impulsion p relativement grande ?

En accélérant des particules chargées dans une différence de potentiel V , elles gagnent une énergie cinétique égale à l'énergie potentielle électrique, soit $E_c = p^2/2m = qV$ où

m et q sont leur masse et leur charge électrique. Ceci correspond à des impulsions de $p = \sqrt{2mqV}$, et a des longueurs d'onde $\lambda = h/\sqrt{2mqV}$.

La distance d de l'espacement typique des atomes dans un cristal étant de deux Angströms, il faut accélérer nos électrons dans des différences de potentiel de l'ordre de : $V > h^2/2mqd^2 = 38$ V ce qui est extrêmement abordable, y compris en 1927. C'est ce qui permit à Davisson et Germer d'observer les premières figures d'interférence d'électrons, avec des électrons de 60 à 80 eV.

La même année, G.P. Thomson obtint également des figures de diffraction, mais par transmission au travers de feuilles minces de Mica, avec des électrons de 10^4 à 10^5 eV.

Mais l'histoire ne s'arrête pas là ! Des phénomènes ondulatoires ont depuis été observés sur des neutrons et plus récemment sur des atomes, qui rejoignent ainsi les photons et les électrons au rang des particules qui nous ont révélé leurs aspects corpusculaires et ondulatoires.

Anecdote : Thomson et Davisson obtinrent le prix Nobel en 1937, pour la découverte de l'aspect ondulatoire des électrons. Ce Sir George Paget Thomson (1892-1975) n'est autre que le fils de Sir Joseph John Thomson (1846-1940) qui eut pour sa part le prix Nobel en 1906, pour sa découverte de l'électron en 1896 !

3.1.5 Corpusculaire ou ondulatoire ?

Telle est la question. Comment savoir si une particule se comporte comme un corpuscule ou comme une onde ? Cette question est importante dans la mesure où les deux aspects peuvent prédire des résultats différents. Prenons l'exemple des fentes d'Young : deux orifices minces et parallèles éclairés par une même source de particules. En physique classique, la situation est simple. Les particules sont soit des corpuscules (expérience 1) soit des ondes (expérience 2).

Expérience 1 : Dans le cas corpusculaire, les particules passent par l'une ou l'autre des fentes. C'est par exemple le cas, si vous essayez de faire l'expérience avec des projectiles macroscopiques comme des balles de tennis. Il est bien évident que vos balles passeront par l'une ou l'autre des fentes. La distribution des balles de l'autre côté du mur est la somme des distributions que vous obtenez en faisant les deux expériences consistant à boucher une des fentes¹.

Expérience 2 : Dans le cas ondulatoire, on observe des franges d'interférence sur l'écran situé de l'autre côté des fentes. C'est par exemple le cas si vous faites l'expérience dans un bassin rempli d'eau et si vous créez une onde plane. En arrivant sur le mur, l'onde crée deux ondes secondaires de l'autre côté du mur, circulaires si les fentes sont assez étroites, qui formeront des interférences constructives ou destructives selon l'endroit que

1. Notez que si les fentes sont assez fines, les balles peuvent rebondir sur leurs parois, et les distributions peuvent se superposer. Mais ceci n'a rien à voir avec un phénomène ondulatoire et il est en particulier peu probable d'obtenir des franges sombres.

vous considérez de l'autre côté du mur. Le résultat n'est alors plus du tout la somme de ceux que vous obtenez en bouchant tour à tour les fentes.

Expérience 3 : En mécanique quantique, avec des électrons par exemple, la situation est duale. Sur l'écran, ce sont bien des électrons individuels qui sont observés, des corpuscules de matière heurtant l'écran et pouvant être détectés de diverses manières. Néanmoins, en effectuant un comptage statistique des électrons arrivant ici ou là le long de l'écran, nous retrouvons une distribution de franges d'interférences.

Si nous imaginons que nos électrons sont corpusculaires, ils se doivent de passer par une des deux fentes et pas par l'autre. La distribution sur l'écran devraient alors être la somme des deux distributions des expériences à une fente, ce qui n'est pas le cas. Au passage des fentes, les électrons ont un aspect ondulatoire, et pas corpusculaire : ils ne passent pas par une des fentes, mais plutôt par les deux. Ce n'est qu'en arrivant sur l'écran que leur aspect corpusculaire est révélé.

Expérience 4 : Il est d'ailleurs envisageable de faire une nouvelle expérience, dans laquelle nous mesurerions, entre les fentes et l'écran, la position des électrons et donc la fente par laquelle ils sont individuellement passés. Il est par exemple possible d'éclairer la sortie des fentes par des photons de longueur d'onde appropriée, susceptibles d'être diffusés par les électrons, ce qui permet de voir par où les électrons passent (coïncidence d'un électron sur l'écran et d'un éclair derrière l'une ou l'autre des fentes). Que se passe-t-il alors ? Y a-t-il contradiction avec l'expérience 3 ? Non, si nous parvenions à réaliser l'expérience 4, nous nous apercevions que les franges disparaissent quand la lumière est allumée ! Et qu'elles réapparaissent quand on l'éteint !

C'est la mesure de la position de l'électron qui révèle son aspect corpusculaire, que cette mesure ait lieu sur l'écran – les interférences ont alors le temps de se former – ou au niveau des fentes – l'onde de l'électron initial passant par les deux fentes n'existe plus, et il n'y a plus d'interférence. Troublant non ?

Le fait qu'une particule se comporte comme une onde ou comme un corpuscule dépend complètement de l'expérience que l'on réalise. Que faisons-nous en physique des particules élémentaires ? Il est très délicat de répondre précisément à cette question sans se plonger dans la théorie quantique des champs, mais voici tout de même un embryon de réponse.

Quand on considère des collisions ou des désintégrations du point de vue expérimental, on utilise essentiellement l'aspect corpusculaire, en appliquant la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Il est rare qu'on mette en évidence les aspects ondulatoires des particules élémentaires. C'est par exemple le cas dans le système des kaons neutres que nous étudierons au chapitre suivant.

En revanche, quand ils se penchent sur les mécanismes profonds qui régissent ces processus d'interaction ou de désintégration, les théoriciens font un usage abondant de l'aspect ondulatoire. Sans entrer dans les détails, sachez qu'on modélise l'interaction de deux électrons par l'échange d'une population statistique de photons connectant n'importe quels points de l'espace-temps, et pouvant prendre n'importe quelle énergie !

3.2 Mécanique ondulatoire

Nous avons vu que les particules se comportaient à la fois comme des corpuscules et comme des ondes. Que sont ces ondes ?

3.2.1 Interprétation probabiliste

En mécanique quantique, une particule est représentée par une fonction complexe de l'espace et du temps : $\psi(\vec{r}, t)$, dite **fonction d'onde**. La probabilité de trouver la particule dans un volume d^3r au point \vec{r} de l'espace à l'instant t est proportionnelle à :

$$\mathcal{P}(\vec{r}, d^3r) \propto |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r \quad (3.8)$$

ψ est donc une **amplitude de densité de probabilité de présence**.

Normalisation : On la normalise généralement à 1 sur l'espace considéré, pour que la valeur ci-dessus donne directement la probabilité.

$$\int_{\text{espace}} |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = 1 \quad (3.9)$$

Notez que ceci n'a de sens que si les fonctions d'ondes sont **de carré sommable**, c'est-à-dire si la somme des probabilités est finie. Cette interprétation probabiliste de la fonction d'onde a été donnée par Max Born en 1926 (prix Nobel 1954).

Mesure de position : Une particule dans l'état ψ n'est donc pas localisée précisément dans l'espace. Il n'est ainsi pas possible de savoir exactement où elle se trouve avant de l'avoir observée. En revanche, si on prépare de nombreuses particules dans un même état ψ , on peut vérifier que l'ensemble des mesures de leur position suit bien la loi de probabilité 3.8.

Principe de superposition : Un des principes de base de la mécanique quantique réside dans le fait que la somme de deux fonctions d'onde permises est également une fonction d'onde. Autrement dit, ce sont bien les amplitudes que nous devons sommer, et non les probabilités. C'est ce principe qui donne lieu aux phénomènes typiquement ondulatoires que nous avons vus dans les paragraphes précédents, des amplitudes pouvant s'ajouter ou se soustraire pour que les particules apparaissent ou disparaissent sur l'écran des fentes d'Young.

Si ψ_1 et ψ_2 sont de bonnes fonctions d'onde de carré sommable, toute combinaison linéaire $\psi = \alpha_1 \cdot \psi_1 + \alpha_2 \cdot \psi_2$ en est également une. Il suffit alors d'appliquer notre condition de normalisation sur le nouveau ψ pour obtenir directement sa densité de probabilité de présence. Mathématiquement, cela signifie simplement que nos fonctions d'onde forment un espace vectoriel.

3.2.2 L'équation de Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})\right]\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.10)$$

Cette équation, due à Schrödinger (prix Nobel 1933) est l'équation qui gouverne une particule de masse m plongée dans un champ statique $V(\vec{r})$. Il s'agit d'une équation aux valeurs propres dont les inconnues sont :

- les énergies accessibles E_n , qu'elles soient discrètes ou continues,
- les fonctions d'ondes associées ψ_n .

L'opérateur qui agit sur la fonction d'onde ψ est appelé le **hamiltonien** \mathcal{H} et on y reconnaît une partie cinétique $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ et une partie potentielle $V(\vec{r})$. Grâce à cette équation, vous pouvez plonger un objet (une particule) dans un certain potentiel dépendant de l'espace, et en déduire quelles sont les énergies possibles et leur fonction d'onde associée (c'est-à-dire la distribution des positions). L'imposition de conditions aux limites entraîne souvent une quantification des énergies possibles : $\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n$. Le spectre des énergies est alors discret.

Exercice : Dans le cours de physique de première année, vous avez traité le cas du puits plat infini qui est un parfait exemple de résolution littérale de l'équation de Schrödinger et de quantification de l'énergie.

3.2.3 L'équation d'évolution

En mécanique quantique un système qui n'est **soumis à aucune observation** évolue en suivant l'équation :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi, \quad (3.11)$$

où \mathcal{H} est le hamiltonien du système. Notez que, bien que la mécanique quantique soit probabiliste, elle n'en est pas moins déterministe. Un système n'évolue pas au hasard, mais conformément à l'équation d'évolution. En particulier, si le système est dans un état propre de l'énergie, on a $\mathcal{H}\psi = E\psi = i\hbar\cdot\partial\psi/\partial t$ et il vient :

$$\psi(t) = \psi(t_0) \times e^{-i\frac{E}{\hbar}(t-t_0)} \quad (3.12)$$

En ce cas, la probabilité de présence en un point de l'espace ne dépend pas du temps. Une particule d'énergie parfaitement définie ne semble pas se propager au sens classique du terme. Elle fera tout au plus des sauts quantiques instantanés et imprévisibles.

3.2.4 La particule libre

Imaginons une particule libre, c'est-à-dire n'interagissant avec rien, donc pour laquelle $V(\vec{r}) = 0$. Pour connaître la forme de la fonction d'onde, il nous reste à résoudre l'équation générale conciliant les équations 3.10 et 3.11 :

$$\mathcal{H}\psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r}, t), \quad (3.13)$$

dont les solutions générales sont :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)} \quad \text{avec} \quad \hbar\omega = \hbar^2 k^2 / 2m \quad (3.14)$$

Si on suppose que l'impulsion \vec{p} de cette particule est parfaitement définie, son énergie l'est également et vaut $E = p^2/2m$. La résolution de l'équation de Schrödinger 3.10 donne $\vec{p} = \hbar\vec{k}$. La résolution de l'équation d'évolution donne $E = \hbar\omega$. On retrouve bien la prédiction de Louis de Broglie.

L'interprétation probabiliste de ce résultat est des plus étranges. La densité de probabilité de présence $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = 1$ de notre particule serait essentiellement constante dans l'espace et le temps. En fait, la fonction que nous obtenons n'est pas de carré sommable et ne saurait donc représenter une véritable particule. Nous verrons au paragraphe suivant comment se sortir de cette apparente impasse.

Exercice : Imaginez une particule libre, dont l'énergie cinétique est définie (mais pas son vecteur impulsion \vec{p}) dont on sait qu'elle se trouve à l'instant $t = 0$ en un point donné (nous l'y avons vue).

Solution : L'équation de Schrödinger devient $-\hbar^2 \Delta \psi = p^2 \psi$. Exprimons le laplacien Δ en coordonnées sphériques², et cherchons une solution ne dépendant pas de ϕ et θ . On obtient les deux solutions :

$$\psi_- = \frac{e^{-i\frac{p \cdot r}{\hbar}}}{r} \quad \text{et} \quad \psi_+ = \frac{e^{+i\frac{p \cdot r}{\hbar}}}{r} \quad (3.15)$$

Même si elles convergent à l'infini, ces fonctions ne sont toujours pas de carré sommable. Elles correspondent à des ondes sphériques, dont l'amplitude diminue en $1/r$.

3.2.5 Les paquets d'onde

Les ondes que nous obtenons en résolvant l'équation d'une particule libre d'impulsion définie ne sont ainsi pas de carré sommable. Elles ne sauraient donc correspondre à un système physique et *a fortiori* à une particule. Les particules n'ont donc pas une impulsion, donc une énergie, absolument définies.

Toute combinaison linéaire de nos solutions étant également solution de l'équation, nous pouvons en revanche construire un **paquet d'ondes** dont le carré sera sommable :

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{p})}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - E \cdot t)}{\hbar}} d^3 p \quad (3.16)$$

où $\rho(\vec{p})$ est une fonction quelconque de \vec{p} dès l'instant qu'elle permet d'intégrer la norme de ψ sur l'espace. La normalisation a été choisie de telle manière que les normes des deux fonctions soient identiques $\int |\psi|^2 d^3 r = \int |\rho|^2 d^3 p$. La fonction $\rho(\vec{p})$ peut par exemple être le produit de trois gaussiennes, une par axe de l'espace, centrées sur une certaine

2. $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \times) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right)$

valeur d'impulsion et possédant une certaine dispersion. Mathématiquement, $\psi(\vec{r}, t)$ et $\rho(\vec{p}) \exp(-iEt/\hbar)$ sont leur transformée de Fourier respective.

Plus l'impulsion de la particule est définie, c'est-à-dire plus la fonction $\rho(\vec{p})$ est concentrée autour d'un certain p_0 , plus la fonction $\psi(\vec{r}, t)$ est étalée. *A contrario*, plus la particule est localisée dans l'espace et moins son impulsion est définie.

De fait, l'équation 3.16 implique que les écarts types³ Δx et Δp_x sont tels que :

$$\Delta x \times \Delta p_x \geq \hbar/2 \quad (3.17)$$

Il s'agit là de la relation d'incertitude d'Heisenberg, démontrée dans le cas particulier d'un paquet d'ondes planes.

Exercice : Faites évoluer un paquet d'onde unidimensionnel d'impulsion assez bien définie p_0 ($\Delta p \ll p_0$) et étudiez l'évolution de sa position et de son impulsion⁴.

Solution : La position moyenne évolue comme $\langle x \rangle_t = \langle x \rangle_0 + v.t$ où $v = p_0/m$ et on retrouve une loi de propagation ressemblant à la mécanique classique. La grande différence provient de la dispersion de la position Δx qui évolue également, en suivant une loi quadratique $\Delta x = \Delta x_0 + a.t + b.t^2$ avec $b > 0$, ce qui implique que la particule finit par s'étaler indéfiniment. L'impulsion moyenne reste égale à $p_0 = mv$ et sa dispersion $\Delta p = m.b$ est responsable de l'étalement du paquet d'ondes.

Conclusion : Une particule en mécanique quantique n'est pas un objet simple. Il ne peut s'agir que d'un paquet d'ondes, possédant des extensions dans l'espace et en impulsion telles que $\Delta x \times \Delta p_x \geq \hbar/2$. Il ne s'agit pas là d'une limite expérimentale sur la précision des appareils de mesure, mais bel et bien d'une propriété intrinsèque de la particule ! Toutefois, la plupart du temps, les appareils de mesure ont des résolutions bien plus grandes que ces dispersions intrinsèques qui restent invisibles.

3.3 Prendre des mesures

Jusqu'ici nous avons étudié la position et l'impulsion d'une fonction d'onde quantique. Les particules ont d'autres propriétés, d'autres observables que l'on peut tenter de mesurer. En physique classique, la donnée de la position et de l'impulsion détermine complètement l'état d'une particule. Qu'en est-il en mécanique quantique ?

3. L'écart type représente la dispersion d'une variable aléatoire x autour de sa moyenne $\langle x \rangle$ et vaut : $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

4. Cet exercice est assez technique, mais les curieux en trouveront une discussion complète dans la plupart des livres de mécanique quantique.

3.3.1 Équations aux valeurs propres

L'équation de Schrödinger est l'équation aux valeurs propres pour l'énergie, mais vous pouvez écrire des équations aux valeurs propres pour tout type de grandeur physique. Comment faire ?

Il suffit d'écrire la quantité Q en physique classique en fonction de l'impulsion \vec{p} et de la position \vec{r} et de remplacer ces deux grandeurs physiques par leurs opérateurs associés en mécanique quantique :

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r} \times \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \quad (3.18)$$

Ce **principe de correspondance** ou **principe des opérateurs associés** permet d'obtenir l'opérateur quantique \mathcal{Q} associé à toute grandeur classique Q . Reste à résoudre une équation aux valeurs propres :

$$\mathcal{Q} \psi = q \psi \quad (3.19)$$

pour savoir quelles sont les valeurs q_n permises (qu'elles soient continues ou discrètes) et les fonctions d'onde ψ_n associés.

Exemple 1 : L'énergie cinétique $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$. On retrouve le premier terme de l'équation de Schrödinger.

Exemple 2 : Le moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} \rightarrow -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$. Nous rappellerons plus loin les solutions trouvées pour cette quantité essentielle.

Exemple 3 : Dans le monde des particules, il nous arrivera de faire la démarche inverse. Ayant identifié une nouvelle propriété des particules élémentaires et connaissant ce qu'elle vaut sur telle ou telle particule, nous inventerons des opérateurs pour cette quantité, dont nous connaissons déjà les vecteurs et les valeurs propres (voir par exemple le cas de l'étrangeté ou de la conjugaison de charge aux paragraphes 4.1.2 et 4.2.2).

3.3.2 Résultat d'une mesure...

Soit un système quantique et une quantité mesurable Q pour lesquels nous avons résolu l'équation aux valeurs propres ($\mathcal{Q}\psi = q\psi$). Nous connaissons donc le spectre des valeurs possibles pour Q , ainsi que les états quantiques associés : (q_n, ψ_n) .

... sur un état propre

Si nous essayons de mesurer la quantité Q sur un état propre ψ_n de \mathcal{Q} , nous trouverons à coup sûr la valeur propre associée q_n .

... sur une combinaison linéaire

Admettons maintenant que nous sachions préparer le système dans un état combinaison linéaire de ses états : $\psi = \sum_n c_n \psi_n$. Q n'est pas défini pour ce système, puisque ψ n'est pas vecteur propre de Q .

Que se passe-t-il si nous essayons de mesurer Q ? Le système choisit aléatoirement une des possibilités, avec des probabilités égales à $|c_n|^2$ (divisées par $\sum_n |c_n|^2$ si nous n'avons pas pris soin de normaliser ψ). Ce résultat est connu sous le nom de **principe de décomposition spectrale**.

Que se passe-t-il après que nous avons effectivement mesuré q_i ? À l'instant de la mesure, le système tombe dans l'état ψ_i – on parle d'**effondrement du paquet d'onde** – et évoluera à partir de celui-ci. Une mesure immédiatement postérieure à la première aura une grande probabilité de donner le même résultat.

Remarque : L'interprétation probabiliste donnée par l'équation 3.8 n'est qu'une application du principe de décomposition spectrale à l'opérateur position. Le spectre de l'opérateur $\vec{r} \times$ est continu et les valeurs propres \vec{a} sont associées aux fonctions $\delta(\vec{r} - \vec{a})$. Une fonction d'onde quelconque se décompose ainsi sur cette base d'états : $\psi(\vec{r}) = \int_{\text{espace}} \delta(\vec{r} - \vec{a}) \psi(\vec{a}) d\vec{a}$. La densité de probabilité de mesurer la particule au point \vec{a} est bien $|\psi(\vec{a})|^2$.

Remarque importante : Ce comportement illustre deux grandes nouveautés de la mécanique quantique :

- Il est impossible de prédire avec certitude le résultat d'une mesure.
- L'observateur agit sur le système puisqu'il en change la fonction d'onde.

3.3.3 Mesures simultanées

Comme nous l'avons vu dans le cas des ondes planes, il semble que la position et l'impulsion d'une particule ne puissent être définies avec une infinie précision. De fait, nous avons montré que leurs dispersions devaient intrinsèquement respecter $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. *A fortiori*, il est donc impossible de mesurer ces deux quantités avec une précision infinie au même instant.

Il en va de même d'autres quantités. Pour espérer mesurer deux quantités Q et R en même temps, il faut qu'il existe des fonctions propres communes aux deux opérateurs. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que le commutateur des deux opérateurs associés doit être nul :

$$[Q, R] = QR - RQ = 0 \quad (3.20)$$

S'il n'est pas nul, les deux quantités ne peuvent être mesurées en même temps. C'est en particulier le cas de la position et de l'impulsion mesurées sur un même axe, puisque :

$$[x, p_x] = i\hbar \quad (3.21)$$

3.4 Le moment cinétique

3.4.1 Les observables ?

Intéressons-nous au moment cinétique, $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ en physique classique, qui admet trois opérateurs associés en mécanique quantique : \mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y et \mathcal{L}_z . Ces trois opérateurs ne commutent pas et ne sont donc pas simultanément mesurables. En revanche, ils commutent tous trois avec l'opérateur $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y] &= i\hbar \mathcal{L}_z & [\mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z] &= i\hbar \mathcal{L}_x & [\mathcal{L}_z, \mathcal{L}_x] &= i\hbar \mathcal{L}_y \\ [\mathcal{L}^2, \mathcal{L}_x] &= 0 & [\mathcal{L}^2, \mathcal{L}_y] &= 0 & [\mathcal{L}^2, \mathcal{L}_z] &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

On peut donc mesurer simultanément le module du moment cinétique et sa projection sur un axe quelconque. On choisit généralement de faire coïncider l'axe z avec l'axe de mesure, car les calculs sont beaucoup plus simples (voir équation 3.24). Notons $|l, m\rangle$ les vecteurs propres communs à ces deux opérateurs. Les nombres l et m caractériseront leurs valeurs propres. **À partir de ces seules relations de commutation**, il est possible de montrer que les valeurs propres obéissent aux deux règles suivantes :

$$\mathcal{L}^2|l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l, m\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_z|l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle. \quad (3.23)$$

avec l entier ou demi-entier et m variant par sauts entiers entre $-l$ et $+l$. Les valeurs permises sont donc :

- Si l vaut 0, m vaut 0 ;
- Si l vaut $\frac{1}{2}$, m vaut $-\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$;
- Si l vaut 1, m vaut -1, 0 ou +1 ;
- Si l vaut $\frac{3}{2}$, m vaut $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ ou $+\frac{3}{2}$;
- et ainsi de suite.

Les valeurs propres du moment cinétique doivent obéir à ces règles, mais les respectent-elles exactement ? Toutes les valeurs ci-dessus sont-elles permises ?

3.4.2 Le moment cinétique orbital

Considérons le moment cinétique orbital par rapport à une origine donnée. En coordonnées sphériques (rayon r positif, colatitude θ comprise entre 0 et π et azimut ϕ compris entre 0 et 2π) l'expression de \mathcal{L}_z est particulièrement simple :

$$\mathcal{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (3.24)$$

puisque $\mathcal{L}_z|l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle$, la partie azimutale de la fonction d'onde est nécessairement :

$$\psi_{lm}(\vec{r}) = \chi_{lm}(r, \theta) \times e^{im\phi}. \quad (3.25)$$

Comme cette fonction doit être de période 2π en ϕ : $e^{i2\pi m} = 1$ et m ne peut être qu'entier (et donc pas demi-entier). Puisque m varie par sauts entiers entre $-l$ et $+l$, l est également entier.

La résolution en θ n'apporte pas de nouvelle restriction et permet d'obtenir les fonctions propres $\mathcal{Y}_l^m(\theta, \phi)$ du moment cinétique orbital, fonctions qui sont données dans le chapitre 4 du cours de physique de première année.

Ces fonctions ont une propriété de parité intéressante. Par renversement des coordonnées de l'espace, elles sont soit impaires, soit paires, leur parité étant celle du nombre quantique l :

$$\mathcal{Y}_l^m(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l \mathcal{Y}_l^m(\theta, \phi). \quad (3.26)$$

3.4.3 Le spin

Nous avons vu que les moments cinétiques orbitaux ne correspondaient qu'aux solutions où le nombre quantique l est entier. La question se pose alors de savoir si les solutions demi-entières existent dans la nature ou s'il s'agit d'un artifice du calcul consistant à partir des relations de commutation.

Si nous avons présenté le moment cinétique ainsi, c'est bien parce que les solutions demi-entières existent. Elles furent révélées par l'expérience de Stern et Gerlach et présentent aujourd'hui un rôle fondamental en physique des particules.

Expérience de Stern et Gerlach

Dans l'expérience de Stern et Gerlach, un jet d'atomes traverse une zone où règne un fort gradient de champ magnétique. Le résultat étonnant de cette expérience est que le faisceau se sépare et donne deux taches distinctes sur un écran situé au-delà de la zone de champ magnétique.

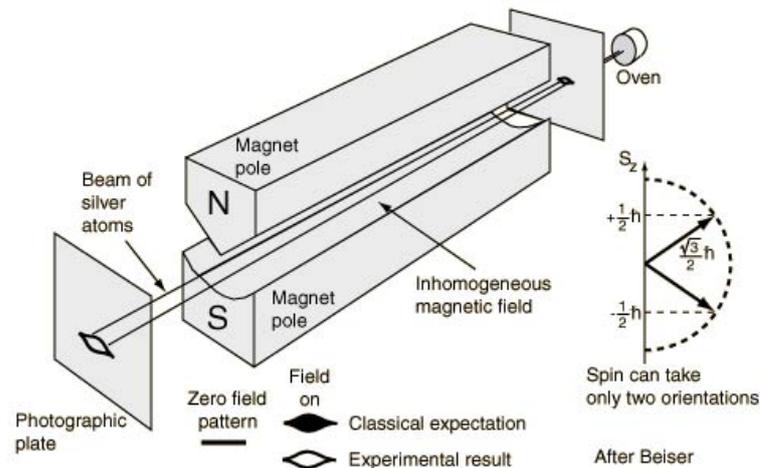


FIGURE 3.4 – Dans l'expérience de Stern et Gerlach un jet de particules est dévié par un gradient de champ magnétique. Au lieu des dispersions classiques permises, les moments magnétiques semblent se projeter avec des valeurs précises sur l'axe du champ.

En physique classique, une particule de masse m et de charge q animée d'un moment

cinétique \vec{L} crée un moment magnétique \vec{M} :

$$\vec{M} = \frac{q}{2m} \vec{L}. \quad (3.27)$$

Dans un gradient de champ magnétique, un tel objet subit une force égale à $\vec{\nabla}(\vec{M} \cdot \vec{B})$.

Dans l'expérience de Stern et Gerlach, le faisceau semble subir une telle force. Mais si on suppose que les atomes arrivent avec une répartition isotrope et classique de leur moment magnétique, on obtient une répartition continue sur l'écran, selon que le moment est plus ou moins aligné avec l'axe du champ. En réalité, on n'observe que deux taches et ce moment semble donc quantifié. Il semble que lors du passage du gradient de champ, on *mesure*, au sens quantique du terme, ce moment selon l'axe z , et seules certaines valeurs sont possibles.

Puisqu'on observe deux taches, notre moment se comporte comme le moment $l = \frac{1}{2}$ que nous avons vu et qui ne possède que deux projections possibles sur l'axe z : $-\frac{\hbar}{2}$ et $+\frac{\hbar}{2}$.

Comme il s'agit d'un moment demi-entier, ce moment magnétique ne peut en aucun cas provenir d'un moment cinétique, au sens classique d'une circulation de charges. Quel est alors le rapport entre le moment cinétique de projection $\pm \frac{\hbar}{2}$ et le moment magnétique ? Si on veut garder le comportement classique, l'équation 3.27 donne : $\mu = \frac{q}{2m} \times \frac{\hbar}{2}$. La mesure montre que cela dépend de la particule (le tableau 3.1 en donne quelques valeurs). Pour l'électron, elle est par exemple deux fois supérieure à cette quantité et vaut ce qu'on appelle le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = \frac{-e\hbar}{2m_e} = -9,274 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}. \quad (3.28)$$

Conclusion : Nous sommes en présence de quelque chose de nouveau, de purement quantique, ne possédant même pas d'équivalent en mécanique classique. Il fallait le voir pour le croire. L'expérience de Stern et Gerlach est la première d'une longue série qui démontre que ce moment existe. On appelle ce nouveau moment le **moment cinétique intrinsèque**, ou **spin**.

Spin des particules usuelles

Le tableau 3.1 résume la valeur du spin de quelques particules élémentaires, ainsi que leurs moments magnétiques lorsqu'ils sont connus.

Remarque sur les particules de masse nulle : on peut montrer en théorie des groupes de symétrie que l'existence du spin des particules est liée à l'invariance par rotation des lois de la physique. Autrement dit, le fait qu'une particule ponctuelle au repos n'admette pas d'axe privilégié se caractérise par l'existence de son spin, tel que nous venons de le décrire. Or, une particule de masse nulle ne peut jamais être au repos, puisqu'elle va à la vitesse de la lumière dans tous les référentiels. Elle admet alors toujours un axe privilégié : celui de sa propagation. L'invariance par rotation n'est alors pas totale. Il reste une invariance par rotation autour de son axe de propagation. On

Particule	Spin	Moment magnétique
Les leptons		
électron	1/2	$-e\hbar/2m_e = \mu_B$
muon	1/2	$-e\hbar/2m_\mu$
neutrino ν_e	1/2	$< 1, 5 \cdot 10^{-10} \mu_B$
neutrino ν_μ	1/2	$< 6, 8 \cdot 10^{-10} \mu_B$
Le photon	1	0
Les quarks	1/2	inconnu
Quelques baryons		
proton	1/2	$2, 79 \times e\hbar/2m_p$
neutron	1/2	$-1, 91 \times e\hbar/2m_p$
Λ	1/2	$-0, 613 \times e\hbar/2m_p$
Résonances Δ	3/2	inconnu
Quelques mésons		
pions	0	0
kaons	0	0
η	0	0
ρ^+	1	inconnu

TABLE 3.1 – Spin et moment magnétique de quelques particules.

appelle **hélicité** la projection du spin d'une particule sur son axe de propagation. La théorie des groupes prédit alors que les seules projections possibles de l'hélicité d'une particule de masse nulle de spin l sont les extrêmes $-l$ et $+l$. Un photon, dont le spin est 1, ne peut par exemple prendre que les états d'hélicité -1 et $+1$ (et pas 0).

3.4.4 Conservation du moment cinétique

Il est possible de démontrer que l'invariance des lois de la physique par rotation entraîne la conservation du moment cinétique.

Cette conservation a des conséquences importantes en physique des particules. Par exemple, si une particule de spin S donné se désintègre, son spin doit se répartir entre les spins de ces divers produits de désintégration, et éventuellement sous la forme d'un moment cinétique orbital des uns par rapport aux autres. Un autre exemple provient des particules composites, dans la mesure où leur spin provient des spins de leurs constituants élémentaires et d'une éventuelle rotation de ceux-ci les uns par rapport aux autres.

Dès lors, il devient capital de savoir composer des moments cinétiques.

Règles d'addition des moments cinétiques

Considérons deux moments cinétiques l_1 ou l_2 susceptibles d'être ajoutés. Il peut s'agir de moments cinétiques orbitaux ou de spins. Les deux règles suivantes s'appliquent :

- Les projections des moments cinétiques sur un axe quelconque s'ajoutent. La somme des états $|l_1, m_1\rangle$ et $|l_2, m_2\rangle$ a nécessairement $m = m_1 + m_2$ pour projection.
- On peut en déduire que **les seuls valeurs possibles pour la norme du moment cinétique total sont comprises entre $|l_1 - l_2|$ et $l_1 + l_2$.**

Nous admettrons cette seconde proposition bien qu'il soit possible de la déduire de la première. Un exemple permet toutefois de mieux comprendre la mécanique de ces additions :

Exemple : Composons un spin $\frac{1}{2}$ (projection $\pm\frac{1}{2}$) avec un spin 2 (projection $-2, -1, 0, +1$ et $+2$). La valeur maximum de la projection est $m = +2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ qui peut correspondre à la projection d'un état $l = \frac{5}{2}$. Ce dernier admet pour projections : $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2}, +\frac{5}{2})$. Si on écrit toutes les possibilités pour $m = m_1 + m_2$, et qu'on en ôte les projections précédentes, on constate qu'il reste : $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{3}{2})$ qui correspondent aux projections d'un état de norme $\frac{3}{2}$ qui vaut bien $|1/2 - 2|$.

Exercice : Quels spins peuvent avoir les baryons (composés de trois quarks de spin $\frac{1}{2}$) et les mésons (composés d'un quark et d'un antiquark tout deux de spin $\frac{1}{2}$) ?

Solution : la composition de deux spins $\frac{1}{2}$ donnent un objet de spin 0 ou 1. Les mésons peuvent donc être de spin 0 ou 1. Si on ajoute un spin $\frac{1}{2}$ sur 0 ou 1, on peut obtenir $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$. Les baryons sont donc de spin $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$. C'est bien ce que l'on constate sur les exemples du tableau 3.1.

Chapitre 4

Kaons neutres et symétries discrètes

Objectifs du chapitre. *Nous allons maintenant étudier le système de deux particules, les kaons neutres, qui ont le mérite de présenter un comportement extrêmement quantique. Il s'agit d'une illustration, ainsi que d'une démonstration expérimentale, de certaines des notions vues dans le chapitre précédent. En particulier, nous allons projeter allègrement nos fonctions d'ondes sur trois bases d'états différentes correspondant à des observables différentes. Nous verrons également le rôle capital que jouent les symétries discrètes en physique des particules en général et sur les kaons neutres en particulier. Nous concluons par une section plutôt culturelle où les kaons montreront tout leur intérêt.*

4.1 Les kaons neutres

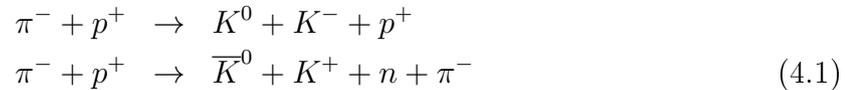
Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, les physiciens découvrirent une foultitude de nouvelles particules à partir de la fin des années 40. Pour expliquer les propriétés bizarres de certaines d'entre elles, ils durent introduire une nouvelle propriété, un nouveau nombre quantique, qu'ils appelèrent *étrangeté*. L'interaction forte, par laquelle ces particules sont créées en typiquement 10^{-20} s, conserve l'étrangeté et ne peut créer une particule étrange seule, son étrangeté devant être compensée par une ou plusieurs autres particules étranges. En revanche, l'interaction faible, par laquelle ces particules se désintègrent avec des temps de vie de l'ordre de 10^{-10} s, peut se permettre de ne pas la respecter.

4.1.1 Deux particules plutôt semblables

Parmi ces particules étranges se trouve une particule baptisée kaon neutre de masse $m_K = 497,7 \text{ MeV}/c^2$ (environ la moitié d'un proton). Le kaon neutre dont tous les autres nombres quantiques sont nuls possède *a priori* une antiparticule qui se distingue d'elle par son étrangeté, le \bar{K}^0 . Est-il alors possible de distinguer ces deux particules dont la masse et la charge électrique sont identiques ?

À la création ?

L'interaction forte conservant l'étrangeté, un kaon neutre est nécessairement produit accompagné d'une particule d'étrangeté opposée. Par exemple :



où l'étrangeté, la charge électrique et le nombre baryonique sont bien conservées (voir tableau 1.1.5). Il est ainsi possible d'identifier si un kaon neutre est un K^0 ou un \bar{K}^0 à sa création, en regardant le signe du kaon chargé créé avec lui. Notez qu'il ne s'agit que d'un cas particulier, et qu'il n'est pas systématiquement possible de distinguer K^0 et \bar{K}^0 à leur création.

Et à la désintégration ?

L'interaction faible autorise des désintégrations ne respectant pas la conservation de l'étrangeté. Un K^0 peut par exemple se désintégrer en deux pions :



Son antiparticule, le \bar{K}^0 peut *a priori* se désintégrer dans les mêmes modes que le K^0 , en remplaçant les particules filles par leurs anti-particules. Comme les pions π^+ et π^- sont antiparticules l'un de l'autre, le \bar{K}^0 peut ainsi se désintégrer comme le K^0 :



Dans ce cas¹, il n'est pas possible de savoir si le kaon est un K^0 ou un \bar{K}^0 . Mais l'existence de ce mode commun de désintégration a une conséquence plus profonde. Il devient *a priori* concevable que les kaons changent spontanément de nature en passant par un état transitoire fait de deux pions :



Dès lors, il est peut-être judicieux de traiter ces deux particules comme un système quantique à deux états. C'est ce que firent Murray Gell-Mann et Abraham Pais² en 1955.

Avant de se lancer dans le traitement quantique des kaons neutres, demandons-nous si d'autres particules doivent être soumises à cette approche.

- Les masses doivent être égales, ce qui est strictement exact pour des antiparticules respectives. Jusqu'ici, les physiciens n'ont jamais observé d'autres cas d'identité exacte de masse et nous admettrons donc que seules des antiparticules sont susceptibles d'être soumises à cette approche.

1. Certains autres modes de désintégration des kaons neutres permettent de les distinguer, nous y reviendrons.

2. *Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation*, M. Gell-Mann et A. Pais, Physical Review, Vol 97-5, p.1387-1389. Disponible sur internet : http://fangio.magnet.fsu.edu/~vlad/pr100/100yrs/html/chap12_toc.htm

- Les charges électriques doivent être égales. Comme particule et antiparticule ont des charges nécessairement opposées, elle doit être nulle.
- La particule doit être distincte de l'antiparticule, ce qui élimine le photon et le π^0 , ainsi que quelques autres. Les kaons se distinguent essentiellement par leur étrangeté.
- Il doit exister un mode de transition entre particule et antiparticule, ce qui élimine le neutron et autres baryons ($\Lambda^0, \Sigma^0, \Xi^0, \Delta^0, \dots$) car toute transition de l'un à l'autre violerait la conservation du nombre baryonique.

Finalement, il ne reste que très peu de possibilités. Les kaons sont les plus légers à remplir ces conditions, mais il existe aussi les systèmes des mésons D^0 ($1,8 \text{ GeV}/c^2$) et B^0 ($5,3 \text{ GeV}/c^2$). Ce dernier cas est abondamment traité en exercice dans l'annexe ??.

4.1.2 Deux particules plutôt quantiques

K^0 et \bar{K}^0 formeront la base de notre espace, et nous noterons leur vecteur d'onde $|K^0\rangle$ et $|\bar{K}^0\rangle$. La question importe peu, mais connaissons-nous un opérateur dont ils sont états propres? Oui, nous savons que leurs étrangetés sont définies et rien ne nous empêche de définir un opérateur étrangeté \mathcal{S} . Son action sur nos kaons est : $\mathcal{S}|K^0\rangle = |K^0\rangle$ et $\mathcal{S}|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$.

Cette base définie, tout état du système peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux états, dont les composantes a et b peuvent *a priori* évoluer avec le temps :

$$\psi(t) = a(t) |K^0\rangle + \bar{a}(t) |\bar{K}^0\rangle . \quad (4.5)$$

Par exemple, nous avons $a(0) = 1$ et $\bar{a}(0) = 0$ dans le cas de la création d'un K^0 . Pour prévoir son avenir, nous devons résoudre l'équation d'évolution 3.11 :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (4.6)$$

Le hamiltonien \mathcal{H} est composé de deux parties :

- Une partie cinétique \mathcal{H}_0 . Si on se place dans le référentiel où le kaon est au repos, son énergie vaut alors $m_K c^2$. Comme la masse d'une particule est rigoureusement égale à celle de son antiparticule :

$$\mathcal{H}_0 |K^0\rangle = m_K c^2 |K^0\rangle \quad \mathcal{H}_0 |\bar{K}^0\rangle = m_K c^2 |\bar{K}^0\rangle . \quad (4.7)$$

- Une partie d'interaction \mathcal{H}_W (W car c'est l'interaction faible, *weak* en anglais, qui en est responsable) susceptible de transformer les K^0 en \bar{K}^0 et vice versa avec une amplitude que nous noterons A . Remarquons que s'il existe une probabilité qu'un kaon se transforme en son anti-particule en transitant par un état intermédiaire, il existe aussi une probabilité qu'il revienne à son état initial par le même type de procédé : $K^0 \leftrightarrow \pi^+ \pi^- \leftrightarrow K^0$. En notant B cette deuxième amplitude, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_W |K^0\rangle &= A |\bar{K}^0\rangle + B |K^0\rangle \\ \mathcal{H}_W |\bar{K}^0\rangle &= A |K^0\rangle + B |\bar{K}^0\rangle \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notez que dans les deux équations précédentes, nous avons pris les amplitudes de procédés images l'un de l'autre par changement particule \leftrightarrow antiparticule égales. Autrement dit, nous avons pris :

$$\begin{aligned} A &= \langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_W | K^0 \rangle = \langle K^0 | \mathcal{H}_W | \bar{K}^0 \rangle \\ B &= \langle K^0 | \mathcal{H}_W | K^0 \rangle = \langle \bar{K}^0 | \mathcal{H}_W | \bar{K}^0 \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ceci est vrai en première approximation. À l'époque de Gell-Mann et Pais, aucune asymétrie n'avait été observée entre matière et antimatière et ils avaient donc de bonne raison de penser que ces amplitudes étaient égales. Nous en ferons de même pour l'instant, mais verrons plus loin que c'est précisément le système des kaons neutres qui a permis de révéler un léger écart à cette règle.

Reportons les effets de ces hamiltoniens et écrivons l'équation d'évolution en la décomposant sur la base (K^0, \bar{K}^0) :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial a}{\partial t} &= (m_K c^2 + B) \times a(t) + A \times \bar{a}(t) \\ i\hbar \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} &= A \times a(t) + (m_K c^2 + B) \times \bar{a}(t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

dont les solutions se trouvent en faisant la somme et la différence des équations précédentes. On obtient, en divisant par $\sqrt{2}$ pour des raisons de normalisation :

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{a(t) + \bar{a}(t)}{\sqrt{2}} = a_1(0) \times e^{-i \frac{m_K c^2 + B + A}{\hbar} t} \\ a_2(t) &= \frac{a(t) - \bar{a}(t)}{\sqrt{2}} = a_2(0) \times e^{-i \frac{m_K c^2 + B - A}{\hbar} t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ceci nous amène à considérer une nouvelle base d'états pour les kaons :

$$K_1 = \frac{K^0 + \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \quad K_2 = \frac{K^0 - \bar{K}^0}{\sqrt{2}} \quad (4.12)$$

4.1.3 La base K_1/K_2

Sommes-nous en train de partir sur une meilleure base ?

Étudions les propriétés de ces nouveaux états. Si on pouvait créer un kaon dans l'état K_2 ($a_1(0) = 0$ et $a_2(0) = 1$) il le resterait *ad vitam aeternam* puisque $a_1(t) = 0$ à tout instant. De même pour un K_1 . Les états K_1 et K_2 sont donc les états stationnaires du système des kaons neutres.

Que dire alors de la quantité $m_K c^2 + B \pm A$ qui apparaît dans l'évolution de ces deux systèmes ? Si elle est réelle, elle correspond à l'énergie de l'état considéré, puisque $\mathcal{H}|K_i\rangle = i\hbar \partial_t |K_i\rangle = (m_K c^2 + B \pm A)|K_i\rangle$. Comme nous n'avons pas changé de repère d'inertie, nous sommes toujours dans le référentiel au repos du kaon et il s'agit donc de sa masse. Ce résultat est important : K_1 et K_2 n'ont pas nécessairement la même masse !

Ceci dit, est-il possible que $m_K c^2 + B \pm A$ ait une partie imaginaire ? Pour voir ce que ça donne, changeons les notations :

$$m_K c^2 + B \pm A \rightarrow m_i c^2 - i\gamma_i/2 \quad (4.13)$$

Les composantes de notre kaon sur la base (K_1, K_2) deviennent :

$$a_i(t) = a_i(0) e^{-i\frac{m_i c^2}{\hbar}t} e^{-\frac{\gamma_i}{2\hbar}t} \quad (4.14)$$

Les probabilités que notre kaon soit, à l'instant t , dans l'état K_i vaut :

$$|a_i(t)|^2 = e^{-\frac{\gamma_i t}{\hbar}} |a_i(0)|^2 \quad (4.15)$$

Dans le monde des particules, le cas $\gamma_i < 0$ n'a pas de sens physique. La probabilité augmenterait au cours du temps, ce qui impliquerait une sorte de source spontanée de kaons. En revanche, le cas $\gamma_i > 0$ a une interprétation physique immédiate (voir aussi le paragraphe 5.1.3). La probabilité diminue de manière exponentielle, ce qui suit la loi de décroissance d'une population initiale $N(0)$ de particules se désintégrant avec un temps de vie τ pour laquelle il reste, à l'instant t , un nombre de particules $N(t) = N(0)e^{-t/\tau}$.

γ_i peut donc s'interpréter comme le taux de désintégration de la particule, avec la correspondance : $\gamma_i = \hbar/\tau$. K_1 et K_2 pourraient alors se désintégrer avec des temps de vie *a priori* différents³.

À l'époque de Gell-Mann et Pais, on ne connaît qu'un seul temps de vie aux kaons et il vaut $\tau_1 = 0,9 \cdot 10^{-10}$ s et les deux physiciens prédisent donc qu'il existe un autre temps de vie caractéristique. Peu de temps après leur prédiction, on observe en effet des kaons se désintégrant bien plus loin que ne l'autorise τ_1 . La mesure de ce deuxième temps de vie donne $\tau_2 = 5,2 \cdot 10^{-8}$ s $\sim 600 \times \tau_1$. Les masses, en revanche, ne peuvent pas être distinguées expérimentalement.

Les caractéristiques des K_1 et des K_2 sont résumées dans le tableau 4.1. Les modes de désintégration semblent très différents, nous verrons plus loin ce qui permet d'expliquer cela.

4.1.4 Oscillations de kaons

On ne sait créer les kaons neutres que dans les états K^0 ou \bar{K}^0 , éventuellement identifiables par l'autre particule étrange créée avec eux. Considérons par exemple un K^0 . À l'instant de sa création, que nous prendrons comme origine des temps, ses composantes sur la base (K_1, K_2) sont :

$a_1(0) = a_2(0) = 1/\sqrt{2}$. Ultérieurement, les composantes $a_i(t)$ sont données par l'équation 4.14. L'évolution de notre K^0 étant connue, on peut en déduire quelle est

3. Notez que si on avait pris $A = B$, l'état K_2 aurait la même masse que les K_0 et serait éternel. Notez également que si on avait négligé la probabilité B de recombinaison, K_1 et K_2 auraient même temps de vie et même masse, différents de ceux de K_0 et \bar{K}_0 .

Particule	Masse (MeV)	Temps de vie (seconde)	Proba.	Mode
K_1	497,7	$0,9.10^{-10}$	69%	$\pi^+ \pi^-$
			31%	$\pi^0 \pi^0$
K_2	497,7	$5,2.10^{-8}$	39%	$\pi^\pm e^\mp \nu_e$
			27%	$\pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu$
			21%	$3 \pi^0$
			13%	$\pi^+ \pi^- \pi^0$

TABLE 4.1 – Temps de vie et modes de désintégration des kaons neutres. Leurs masses sont en fait légèrement différentes : $\Delta m = 3,49.10^{-12} \text{ MeV}/c^2$ (voir page 95).

la probabilité d'observer tel ou tel état à l'instant t . Regardons par exemple la composante en \bar{K}^0 de notre état :

$$\begin{aligned} \langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle &= \bar{a}(t) = \frac{a_1(t) - a_2(t)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} (e^{-i\frac{m_1 c^2}{\hbar} t} e^{-\frac{t}{2\tau_1}} - e^{-i\frac{m_2 c^2}{\hbar} t} e^{-\frac{t}{2\tau_2}}), \end{aligned} \quad (4.16)$$

soit une probabilité d'observer un \bar{K}^0 égale à :

$$|\bar{a}(t)|^2 = \frac{1}{4} (e^{-\frac{t}{\tau_1}} + e^{-\frac{t}{\tau_2}} - 2 \cos(\frac{\Delta m \cdot c^2}{\hbar} t) e^{-\frac{t}{2\tau_1}} e^{-\frac{t}{2\tau_2}}), \quad (4.17)$$

où Δm est la différence des masses des deux états K_1 et K_2 .

Conclusion : Les kaons oscillent bel et bien, car il existe une probabilité d'observer un \bar{K}^0 à l'instant t alors qu'on avait créé un K^0 à l'instant initial. Est-il alors possible de distinguer expérimentalement la nature des kaons à l'instant t ? La réponse est oui, et la première observation directe d'une oscillation de kaon neutre s'est faite par le procédé suivant, également reproduit à la figure 4.1 :

- Création d'un kaon neutre par interaction d'un faisceau de K^+ dans une chambre à bulles : $K^+ + n \rightarrow K^0 + p$. Seul un K^0 peut être produit pour conserver l'étrangeté du K^+ .
- Absorption du kaon neutre sur un proton de la chambre : $\bar{K}^0 + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$. La production d'un Λ^0 (identifié par sa désintégration en $p \pi^-$) dont l'étrangeté opposée à celle du K^0 prouve que l'objet absorbé est devenu un \bar{K}^0 .

Il existe une façon plus directe de séparer K^0 et \bar{K}^0 , mais sa compréhension nécessite de connaître la structure intime des kaons – c'est-à-dire la nature des quarks qui le constituent – et les mécanismes de l'interaction faible. Pour l'instant, admettons juste que le signe du pion ou du lepton l (électron ou muon) émis dans la désintégration $\pi^\pm l^\mp \nu_l$ permet d'identifier la nature du kaon neutre selon :

$$K^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l \qquad \bar{K}^0 \rightarrow \pi^+ l^- \bar{\nu}_l \quad (4.18)$$

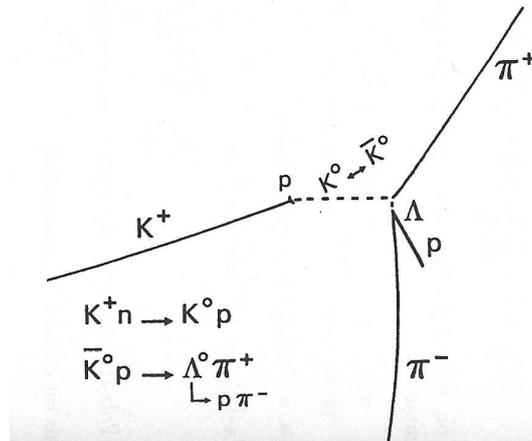


FIGURE 4.1 – Oscillation flagrante d'un kaon neutre.

Ces désintégrations dites semi-leptoniques permettent d'obtenir de splendides courbes d'oscillation des kaons, comme celle de la figure 4.2.

Comme le montre l'équation 4.17, l'observation des oscillations permet de mesurer la différence de masse Δm des états K_1 et K_2 . On trouve $\Delta m = 3,49 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}/c^2$ et il n'est pas étonnant qu'on n'ait pas pu l'observer directement. De fait, il n'est absolument pas envisageable de mesurer une masse aussi précisément. Seule notre foi en la mécanique quantique nous permet d'affirmer que les masses des kaons neutres sont différentes.

Il est à noter que le système des kaons est particulièrement sympathique, dans la mesure où Δm produit des oscillations de l'ordre de τ_S , ce qui permet de les observer assez facilement.

Quel système quantique !

Nous venons d'illustrer comment les kaons neutres formaient un exemple remarquable de système quantique. Nous n'avons en effet cessé de jouer à décomposer leur fonction d'onde sur deux bases d'états :

- K^0 et \bar{K}^0 ont une étrangeté bien définie et sont produits par l'interaction forte. Ce sont les seuls états que nous savons préparer, donc les seuls états initiaux possibles à $t = 0$.
- K_1 et K_2 sont les états stationnaires et ils possèdent des masses et surtout des temps de vie bien définis. On peut considérer que ce sont eux qui se propagent dans l'espace et le temps, d'un instant $t = 0$ à un instant $t = T$.
- Lors d'une désintégration, on effondre l'onde d'un kaon neutre sur l'une ou l'autre des bases, selon la désintégration que l'on observe. Les désintégrations en deux ou trois pions permettent de distinguer le K_1 du K_2 , alors que celles en $\pi^- l^+ \nu_l$ et $\pi^+ l^- \bar{\nu}_l$ permettent de distinguer K^0 de \bar{K}^0 .

Nous allons voir que la situation est encore plus complexe (et encore plus intéressante) car il existe une troisième base d'états. Pour la comprendre, nous devons d'abord étudier ce que l'on appelle les *symétries discrètes*.

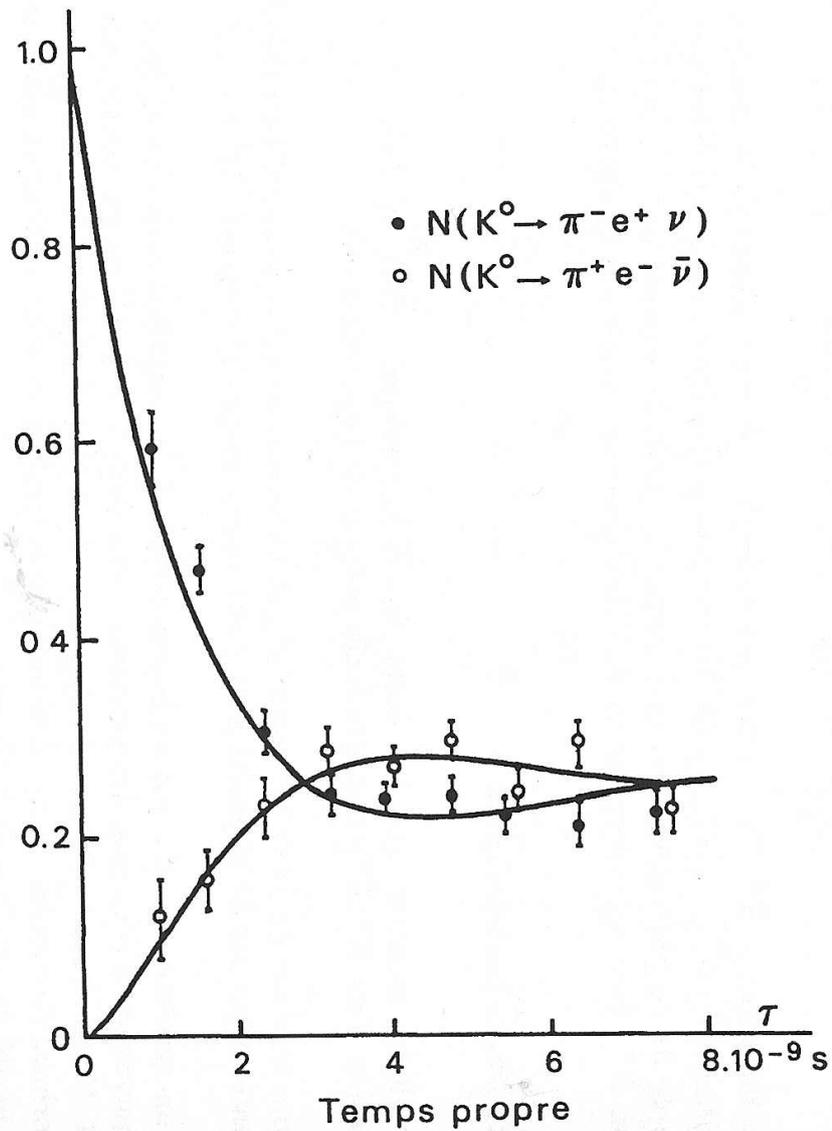


FIGURE 4.2 – Courbes d'oscillation des kaons détectés par leur désintégration semi-leptonique. Distribution des désintégrations semi-leptoniques d'un kaon initialement dans l'état K^0 , en fonction du temps exprimé en multiples du temps de vie propre τ_1 .

4.2 Les symétries discrètes

4.2.1 L'inversion de parité \mathcal{P}

Considérons l'opération qui consiste à renverser les coordonnées de l'espace, c'est-à-dire à changer un vecteur position \vec{r} en son opposé $-\vec{r}$. Un vecteur d'impulsion \vec{p} est également changé de signe par inversion de parité, puisqu'il vaut $m d\vec{r}/dt$. En revanche, un vecteur de moment cinétique, qui vaut $\vec{r} \wedge \vec{p}$ est conservé par opération de parité.

À une rotation d'angle π près, cette opération est équivalente à regarder l'image du système considéré dans un miroir. Essentiellement, elle transforme des trièdres directs en trièdres indirects (et vice versa).

En mécanique quantique, on peut lui associer un opérateur \mathcal{P} . Nécessairement, \mathcal{P}^2 est l'opérateur identité, puisque renverser deux fois de suite les coordonnées de l'espace revient à ne rien faire. De plus, $\mathcal{P}^\dagger \mathcal{P}$ vaut également l'identité pour que les probabilités se conservent ($|\mathcal{P}|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\mathcal{P}^\dagger\mathcal{P}|\psi\rangle$).

Finalement, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}^{-1}$. L'opérateur est ainsi hermitien et donc la parité est observable. Les valeurs propres λ possibles sont $+1$ et -1 car un vecteur propre ψ soumis à \mathcal{P}^2 doit redevenir lui-même ($\mathcal{P}^2\psi = \lambda^2\psi = \psi$).

Nous avons déjà vu (équation 3.26) que les états propres \mathcal{Y}_l^m du moment cinétique étaient des états propres de la parité, de valeur propre $(-1)^l$. Autrement écrit, $\mathcal{P} \mathcal{Y}_l^m = (-1)^l \mathcal{Y}_l^m$.

Parité intrinsèque

Une particule au repos, ponctuelle, peut éventuellement être un état propre de la parité. La seule caractéristique non ponctuelle qu'elle possède est la projection de son spin sur un axe quelconque et nous avons vu qu'un moment cinétique se conservait sous l'opérateur \mathcal{P} . L'image par \mathcal{P} d'une particule est elle-même et il est donc possible que les particules soient caractérisées par une **parité intrinsèque**.

L'expérience montre que c'est bien le cas. Il est par exemple possible de mesurer la parité d'un π^0 en observant l'hélicité des photons émis dans sa désintégration principale $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Cette parité vaut -1 . La parité des pions chargés, π^+ et π^- vaut également -1 . Néanmoins, il n'est pas possible de mesurer la parité intrinsèque de toutes les particules. Certaines doivent être choisies arbitrairement, comme le proton, le neutron et l'hypéron Λ^0 auxquels on attribue la parité $+1$. Ceci fait, on peut déduire la parité de toutes les autres particules en regardant leurs désintégrations dans ces particules de parité définie. Les kaons ont par exemple une parité -1 .

Une petite règle utile : On peut démontrer, mais nous ne le ferons pas ici, que les particules de spin demi-entier (les *fermions*) ont nécessairement une parité intrinsèque opposée à celle de leur antiparticule, alors que les particules de spin entier (les *bosons*) ont une parité intrinsèque égale à celle de leur antiparticule.

Parité d'un système de plusieurs particules

La parité est un nombre quantique multiplicatif. La parité d'un système de plusieurs particules vaut le produit :

- des parités intrinsèques des particules, -1 ou $+1$ selon leur nature.
- du moment cinétique relatif des particules, $(-1)^l$. Si les particules proviennent d'une désintégration, ce moment cinétique provient du spin de la particule mère.

Un système de deux ou trois pions (neutres ou chargés, leur parité intrinsèque étant -1 dans les deux cas) dans un état de moment cinétique orbital $\mathcal{Y}^m(\theta, \phi)$ est ainsi état propre de \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}|\pi\pi\rangle = (-1)^2 \times (-1)^l |\pi\pi\rangle \quad \mathcal{P}|\pi\pi\pi\rangle = (-1)^3 \times (-1)^l |\pi\pi\pi\rangle \quad (4.19)$$

Violation de la parité

Jusqu'en 1957, les physiciens pensaient que cette parité était conservée. Mais le fait que deux particules, le θ et le τ , de même masse (environ 500 MeV) et de même spin (nul) puissent se désintégrer en deux états de parités opposées les intriguait :

$$\begin{aligned} \theta^+ &\rightarrow \pi^+\pi^0 & P &= +1 \\ \tau^+ &\rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+ & P &= -1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Deux physiciens, Lee et Yang, remarquent alors qu'il n'existe aucune preuve que la parité est conservée par l'interaction faible. Ils suggèrent une méthode expérimentale pour le vérifier. Très vite, l'expérience de madame Wu montre qu'ils ont raison. Ils obtiennent le prix Nobel dès 1957.

Dans leur expérience, madame Wu et ses collaborateurs observent la désintégration β d'un noyau de cobalt : $Co^{60} \rightarrow Ni^{60} + e^- + \bar{\nu}_e$. Le spin du cobalt s'aligne avec le champ magnétique. Il vaut 5 et celui du nickel vaut 4. Supposons que le noyau, bien plus lourd que les autres particules filles ne reculent pas. En projetant le spin sur l'axe commun d'émission de l'électron et du neutrino, on obtient les deux configurations images l'une de l'autre par l'opérateur \mathcal{P} (le champ magnétique est pair, comme on peut par exemple le déduire de $m \cdot d^2\vec{x}/dt^2 = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$).

Expérimentalement, les électrons sont émis préférentiellement dans la direction opposée au champ magnétique. L'image de cette expérience par l'opérateur \mathcal{P} est donc impossible. Autrement dit, si l'on regarde notre expérience dans un miroir, cette autre expérience que nous y voyons n'est pas possible dans notre monde. L'interaction faible, responsable de ce processus ne respecte pas la symétrie de retournement des coordonnées de l'espace.

Aujourd'hui, ce résultat a été mieux compris et maintes fois vérifié. Sans en faire la théorie complète, nous pouvons admettre le résultat clef. **L'interaction faible ne produit exclusivement que des anti-neutrinos dont l'hélicité est droite**⁴ (l'hélicité est la projection du spin sur l'axe de mouvement, appelée *droite* quand elle est alignée,

4. Cette proposition n'est exacte que si les neutrinos sont de masse nulle. On sait aujourd'hui que ce n'est pas vrai, mais les déviations sont petites et pour l'instant inobservables.

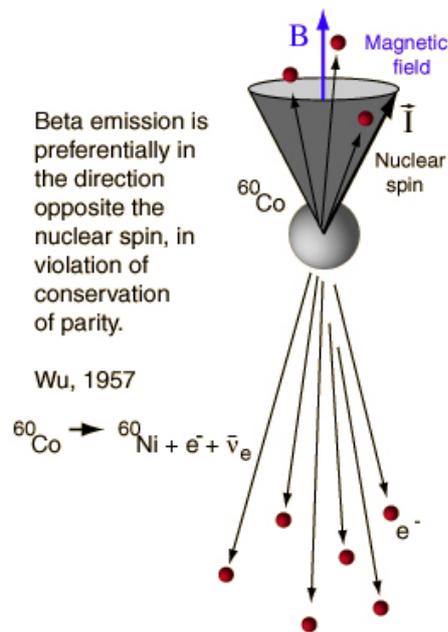


FIGURE 4.3 – Dans l’expérience de madame Wu, des électrons sont émis à l’opposé du spin nucléaire. L’image de l’expérience par parité, dans laquelle les électrons sont émis dans le même sens que le spin nucléaire, n’est pas réalisée.

gauche quand elle est anti-alignée). Comme les neutrinos n’interagissent que par cette interaction, ils n’existent *a priori* que dans cet état.

4.2.2 La conjugaison de charge \mathcal{C}

Comme nous l’avons vu au paragraphe 1.1.2, chaque particule possède une antiparticule, de masse et de spin rigoureusement identiques. Tous leurs nombres quantiques sont en revanche opposés (charge électrique, étrangeté,...) Nous pouvons alors inventer un opérateur \mathcal{C} qui échange particule et antiparticule. Pour les mêmes raisons que l’opérateur \mathcal{P} , ses valeurs propres ne peuvent être que -1 et $+1$.

En revanche, les particules ne sauraient avoir une *charge intrinsèque* puisque \mathcal{C} les transforme en leur antiparticule. En fait, seules les particules qui sont leur propre antiparticule peuvent être état propre de \mathcal{C} . C’est le cas du photon, de valeur propre -1 et du π^0 de valeur propre $+1$.

En 1957, lorsque les physiciens découvrent que la parité n’est pas conservée par l’interaction faible, ils comprennent que cette violation s’accompagne d’une violation similaire de \mathcal{C} . Le produit des deux symétries \mathcal{CP} semble quant à lui respecté.

Reprenons l’exemple du neutrino. Nous avons vu que seuls existaient des antineutrinos d’hélicité droite. Leur image par \mathcal{P} , des antineutrinos d’hélicité gauche, ne sauraient exister. En revanche, leur image par \mathcal{CP} existent bien, ce sont les **neutrinos d’hélicité gauche**.

Exercice : Les pions chargés, de spin nul, se désintègrent en muon et neutrino muonique. Quelles sont les hélicités possible pour les deux réactions $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ et $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$?

Solution : Dans les désintégrations des π^+ (respectivement des π^-), les μ^+ (resp. les μ^-) ne peuvent être émis qu'avec une hélicité gauche (resp. droite).

Conjugaison d'un ensemble de particules

Considérons un ensemble de particules. Si elles sont leur propre antiparticule, l'application de \mathcal{C} ne change rien. C'est par exemple le cas d'un système de deux ou trois pions neutres :

$$\mathcal{C}|\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle \quad \mathcal{C}|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\pi^0\rangle \quad (4.21)$$

Considérons maintenant une paire particule-antiparticule : x et \bar{x} . Appliquer \mathcal{C} revient à échanger les deux particules. Le système obtenu est identique à lui-même et donc un état propre de \mathcal{C} . Notons χ sa valeur propre.

Le principe de Pauli⁵ affirme que la fonction d'onde d'une paire de bosons (resp. de fermions) est symétrique (resp. antisymétrique) par échange des deux particules. Si les particules sont de spin nul, leur échange fait apparaître leur valeur propre χ et leur parité de moment cinétique $(-1)^l$. Comme leur fonction doit être symétrique : $\chi \cdot (-1)^l = 1$ et donc $\chi = (-1)^l$. C'est par exemple le cas d'un système de deux pions chargés dans un état de moment cinétique orbital \mathcal{Y}_l^m :

$$\mathcal{C}|\pi^+\pi^-\rangle = (-1)^l|\pi^+\pi^-\rangle \quad (4.22)$$

Si les particules sont de spin 1/2, on peut montrer que leur état propre est : $\chi = (-1)^{l+s}$, où s est le spin total, 0 ou 1, obtenu par composition des deux spins 1/2.

4.3 Les kaons neutre et \mathcal{CP}

Forts de ces deux nouveaux outils que sont l'inversion de parité et la conjugaison de charge, revenons à nos kaons.

4.3.1 Paire de kaons

Comme ils sont d'étrangetés opposées, il est *a priori* possible de créer une paire $K^0 \bar{K}^0$. Admettons que les deux kaons partent dans des directions diamétralement opposées \vec{r} et $-\vec{r}$. C'est par exemple le cas s'ils constituent les seuls produits de désintégration d'une particule au repos. Il n'existe alors que deux possibilités : le K^0 part dans l'une

5. Ce principe, que nous ne développerons pas plus avant ici, est lié aux statistiques quantiques vues au chapitre 12 du cours de physique de première année.

des deux directions, et le \bar{K}^0 dans l'autre. Considérons maintenant les états quantiques ψ_+ et ψ_- qui sont des mélanges des deux situations :

$$\psi_{\pm} = K^0(\vec{r})\bar{K}^0(-\vec{r}) \pm \bar{K}^0(\vec{r})K^0(-\vec{r}). \quad (4.23)$$

Ces deux états sont états propres de \mathcal{P} , puisque \mathcal{P} échange \vec{r} et $-\vec{r}$, ainsi que de \mathcal{C} , puisque \mathcal{C} échange K^0 et \bar{K}^0 . En effet :

$$\mathcal{P}|\psi_+ \rangle = +1.|\psi_+ \rangle \quad \mathcal{P}|\psi_- \rangle = -1.|\psi_- \rangle \quad (4.24)$$

$$\mathcal{C}|\psi_+ \rangle = +1.|\psi_+ \rangle \quad \mathcal{C}|\psi_- \rangle = -1.|\psi_- \rangle \quad (4.25)$$

Sommes-nous capables de fabriquer un tel état ? C'est le cas du ψ_- car il existe une particule, le méson ϕ , qui est état propre de \mathcal{C} et de \mathcal{P} avec les valeurs propres -1 dont 34% des désintégrations se font en deux kaons neutres. Puisqu'il est état propre de \mathcal{C} , le ϕ est sa propre antiparticule. Sa masse est $1020 \text{ MeV}/c^2$ et son spin vaut 1.

Réécrivons l'état ψ_- sur la base (K_1, K_2) :

$$\psi_- = \frac{K_2(\vec{r})K_1(-\vec{r}) - K_1(\vec{r})K_2(-\vec{r})}{\sqrt{2}} \quad (4.26)$$

Voilà qui est intéressant. Si un méson ϕ se désintègre en deux kaons à l'instant $t = 0$, leur état est nécessairement ψ_- . Si à l'instant $t = T$, on observe la désintégration d'un K_1 (par exemple en deux pions) du côté \vec{r} , l'onde ψ_- de la paire s'effondre sur l'état correspondant $K_1(\vec{r})K_2(-\vec{r})$. L'autre kaon est alors, à cet instant, nécessairement un K_2 . Comme cet état est stationnaire, le kaon reste un K_2 jusqu'à sa mort, qui a typiquement lieu 600 fois plus tard que celle du K_1 .

Ce comportement est un excellent exemple de corrélation quantique. Aussi curieux que cela puisse paraître, ce n'est qu'à l'instant de la première désintégration que la paire décide qui, de K_1 ou de K_2 , est de quel côté, en \vec{r} ou en $-\vec{r}$.

Exercice : Écrire ψ_+ sur la base des (K_1, K_2) et imaginer ce qu'il adviendrait lors de la désintégration en deux kaons d'une hypothétique particule état propre de \mathcal{C} avec la valeur propre $+1$.

Solution : Lors de leur désintégration, les kaons sont soit deux K_1 , soit deux K_2 .

4.3.2 Des états propres de \mathcal{CP}

Si maintenant on applique l'opérateur \mathcal{C} sur les états individuels $|K^0 \rangle$ ou $|\bar{K}^0 \rangle$, on obtient l'autre état, à des phases arbitraires et inobservables près, que l'on peut fixer à -1 :

$$\mathcal{C}|K^0 \rangle = -|\bar{K}^0 \rangle \quad \mathcal{C}|\bar{K}^0 \rangle = -|K^0 \rangle \quad (4.27)$$

Les kaons ayant pour parité intrinsèque -1 , on obtient, en appliquant \mathcal{P} sur les équations précédentes :

$$\mathcal{CP}|K^0 \rangle = |\bar{K}^0 \rangle \quad \mathcal{CP}|\bar{K}^0 \rangle = |K^0 \rangle \quad (4.28)$$

Appliquons maintenant \mathcal{CP} sur les états K_1 et K_2 que nous avons découverts à l'équation 4.12.

$$\mathcal{CP}|K_1\rangle = |K_1\rangle \quad \mathcal{CP}|K_2\rangle = -|K_2\rangle \quad (4.29)$$

Nos deux états sont en fait des états propres de \mathcal{CP} ! Ce n'est pas un complet hasard. Si nous avons trouvé K_1 et K_2 , c'est parce que nous avons pris une amplitude A d'oscillation d'un K^0 vers un \bar{K}^0 égal au processus inverse, qui se trouve être son image par \mathcal{CP} , ainsi qu'une amplitude B de recombinaison d'un K^0 égale à celle du \bar{K}^0 qui sont aussi images l'une de l'autre par \mathcal{CP} (voir l'équation 4.9).

Ceci explique pourquoi ils se désintègrent l'un en deux pions, et l'autre en trois, comme nous l'avons vu au tableau 4.1. En effet, l'état d'un système de deux ou trois pions est état propre de \mathcal{CP} comme nous pouvons l'établir en combinant les équations 4.19, 4.21 et 4.22 et en rajoutant la contrainte sur le moment cinétique total issu du spin nul du kaon :

$$\mathcal{CP}|\pi^0\pi^0\rangle = +|\pi^0\pi^0\rangle, \quad \mathcal{CP}|\pi^+\pi^-\rangle = +|\pi^+\pi^-\rangle, \quad \mathcal{CP}|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle = -|\pi^0\pi^0\pi^0\rangle. \quad (4.30)$$

L'état $|\pi^+\pi^-\pi^0\rangle$ peut quant à lui exister dans les deux états de \mathcal{CP} . Les K_2 , états propres de \mathcal{CP} de valeur propre -1 ne peuvent pas *a priori* se désintégrer en deux pions.

4.3.3 La violation de \mathcal{CP}

Nous avons vu dans le tableau 4.1 que les kaons de longue durée de vie se désintègrent en grande partie en trois pions alors que ceux de courte durée de vie préfèrent les modes en deux pions. Comme les physiciens des années cinquante, nous pensons avoir compris que ceci était lié au fait que les états qui se propagent et se désintègrent avec des temps de vie définis sont les états propres de \mathcal{CP} que nous avons nommés K_1 et K_2 .

Seulement voilà, en 1964, quatre physiciens observent la désintégration de kaons de longue durée de vie en deux pions chargés⁶. La probabilité que ceci arrive est faible, environ deux pour mille, mais pas nulle, ce qui est *a priori* impossible si les états qui se propagent sont bien K_1 et K_2 .

Qu'à cela ne tienne, les états qui se propagent doivent être subtilement différents de K_1 et K_2 . Ils sont aujourd'hui communément appelés K_S et K_L pour *short* et *long* en rapport avec leur temps de vie, et on les écrit :

$$|K_L\rangle = \frac{(|K_2\rangle + \epsilon|K_1\rangle)}{\sqrt{1 + |\epsilon|^2}} \quad |K_S\rangle = \frac{(|K_1\rangle + \epsilon|K_2\rangle)}{\sqrt{1 + |\epsilon|^2}} \quad (4.31)$$

Lors de la désintégration d'un K_L dans un mode qui est valeur propre de \mathcal{CP} (deux ou trois pions), sa fonction d'onde s'effondre sur un des deux états K_1 ou K_2 . Expérimentalement, $|\epsilon|^2$ vaut $2,3 \cdot 10^{-3}$.

L'état K_S est construit de la même manière, et le fait que son ϵ soit le même que celui du K_L vient de la nécessaire égalité entre les masses des états K^0 et \bar{K}^0 . La désintégration

6. J.H. Christenson, J.W. Cronin, V.L. Fitch et R. Turlay, Physical Review Letters. 13, p. 138. Cronin et Fitch obtinrent le prix Nobel en 1980 pour cette découverte.

États	Masse et durée de vie	Vecteurs propres de
K_0 et \bar{K}^0	en principe égales en pratique pas définies	étrangeté, isospin contenus en quark définis
K_1 et K_2	non définies	\mathcal{CP}
K_S et K_L	$\Delta m = 3,49.10^{-12} \text{ MeV}/c^2$ $\tau_S = 0,9.10^{-10} \text{ s}$ $\tau_L = 5,2.10^{-8} \text{ s}$	Hamiltonien

TABLE 4.2 – Les kaons neutres dans tous leurs états. On a longtemps cru que les K_S et K_L étaient K_1 et K_2 , comme dans le tableau 4.1.

d'un K_S en $\pi^+\pi^-\pi^0$, dont la probabilité vaut environ 3.10^{-7} a été observée bien plus tard.

Ce phénomène est perçu comme une violation de la symétrie \mathcal{CP} , puisque les états qui se propagent dans l'espace-temps ne sont pas vraiment les états propres de \mathcal{CP} . Notez que cette violation est légère, de l'ordre de quelques pour mille, alors que les violations de \mathcal{C} et de \mathcal{P} sont totales (il n'existe aucun neutrino droit, ni aucun antineutrino gauche).

Le tableau 4.2 résume les trois paires d'états propres que nous avons rencontrées, ainsi que leurs propriétés essentielles.

4.3.4 Des intérêts quasi-culturels de la violation de \mathcal{CP}

La violation de \mathcal{CP} , de par sa faiblesse ou la rareté des systèmes de particules permettant de l'observer, peut passer pour une affaire d'expérimentateurs pointilleux. Il se trouve qu'elle a eu, et a encore, des conséquences qui font cogiter théoriciens et vulgarisateurs sur des sujets variés : la violation de \mathcal{T} , l'asymétrie matière-antimatière et le mélange des quarks.

La violation de \mathcal{T}

Il existe une troisième symétrie discrète : le renversement du temps. De même que pour l'inversion de parité et la conjugaison de charge, on lui associe un opérateur \mathcal{T} qui change le sens du temps. Un théorème fondamental de théorie des champs affirme que le produit des trois opérateurs \mathcal{CPT} est nécessairement conservé.

Dès lors, une violation de \mathcal{CP} entraîne nécessairement une violation de \mathcal{T} . Cette violation a été directement observée par l'expérience CPLEAR, encore une fois dans le système des kaons neutres. Pour se faire, il suffit de comparer les probabilités d'oscillation $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ et de son image par renversement du sens du temps, donc du sens de la flèche : $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$. Reste à savoir identifier les deux états. Voici la méthode employée par l'expérience CPLEAR qui opérait sur un faisceau d'antiprotons, pour identifier K^0 et \bar{K}^0 à la création :

$$\begin{aligned} \bar{p} + p &\rightarrow \pi^- + K^+ + \bar{K}^0 \\ \bar{p} + p &\rightarrow \pi^+ + K^- + K^0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Le signe du pion ou du kaon chargé permet de connaître la nature du kaon neutre. Pour les identifier lors de la désintégration, CPLEAR utilise les désintégrations semi-leptoniques que nous avons vues à l'équation 4.18.

Finalement, CPLEAR a mesuré l'asymétrie dans les taux de désintégration Γ de kaons initialement identifiés à $t = 0$ à un instant T ultérieur :

$$\frac{\Gamma(\bar{K}_{(t=0)}^0 \rightarrow [\pi^- e^+ \nu_e]_{t=T}) - \Gamma(K_{(t=0)}^0 \rightarrow [\pi^+ e^- \bar{\nu}_e]_{t=T})}{\Gamma(\bar{K}_{(t=0)}^0 \rightarrow [\pi^- e^+ \nu_e]_{t=T}) + \Gamma(K_{(t=0)}^0 \rightarrow [\pi^+ e^- \bar{\nu}_e]_{t=T})} = 6,6 \cdot 10^{-3} \quad (4.33)$$

La mesure a été effectuée pour divers valeurs de T et s'avère constante en fonction de ce paramètre (à l'intérieur des barres d'erreurs).

Remarque : La question de la flèche du temps a inquiété et inspiré de nombreux physiciens, dans la mesure où la plupart des équations de la physique sont symétriques par renversement du temps. Ici, dans un phénomène microscopique, nous observons une certaine *irréversibilité* : les kaons oscillent plus dans un sens que dans l'autre. Malheureusement, cette légère asymétrie ne saurait être invoquée pour expliquer notre flèche du temps macroscopique.

L'asymétrie matière/antimatière

Dans le même ordre d'idée, les équations générales ne semblent pas favoriser la matière par rapport à l'antimatière. Or, nous savons bien que notre monde est essentiellement constitué d'une des deux espèces, que nous appelons *matière* parce que c'est la nôtre. Plus précisément, nous savons que notre monde ne contient pas d'antimatière pour les raisons suivantes :

- Nous n'en avons pas trouvé partout où nous sommes allés : sur la lune, et sur quelques planètes grâce à nos sondes.
- Le soleil nous envoie des protons, et pas des antiprotons.
- Il en va de même des étoiles de notre galaxie.
- S'il existait des galaxies d'antimatière, il devrait exister une frontière où leur antimatière s'annihilerait avec notre matière. Les recherches du rayonnement issu d'une telle annihilation sont restées vaines et on pense qu'il n'existe pas de grande quantité d'antimatière à moins de 200 mégaparsecs⁷ de nous.

De fait, la plus grande quantité d'antimatière que nous n'ayons jamais observée est celle que nous avons produite dans nos accélérateurs.

Pour expliquer cette dominance de la matière, il y a trois hypothèses :

1. L'antimatière est loin. Ce n'est pas exclu, mais elle doit être à plus de 200 mégaparsecs.
2. Le contenu de l'univers n'a jamais été symétrique en matière/antimatière, alors que ses lois le sont.
3. Initialement, l'univers était symétrique, mais une asymétrie s'est créée dynamiquement.

7. Un parsec vaut 3,26 années-lumière, soit $3,08 \cdot 10^{16}$ mètres.

En 1967, Sakharov, fort de la découverte de la violation de \mathcal{CP} , imagine un scénario du troisième type qui a aujourd'hui la faveur des physiciens.

Dans l'histoire de l'univers telle que nous la concevons aujourd'hui avec le modèle du big-bang, il vient un moment où toute la matière s'annihile avec l'antimatière en émettant un rayonnement. Auparavant, le monde est une soupe de matière, d'antimatière et de rayonnement en perpétuelle interaction. Après, le rayonnement se découple de la matière et n'interagit plus. On observe aujourd'hui ce rayonnement, dit *fossile* et son spectre est celui d'un corps noir à 3 kelvins.

Si d'aventure il existait, à cet instant crucial, un excès d'une des deux matières, celui-ci est resté jusqu'à nos jours, et nous pourrions en être constitués. De fait, on peut estimer à partir de l'abondance du rayonnement fossile et de l'abondance des noyaux légers dans l'univers la différence qu'il devait y avoir à l'instant du gel. En terme de quarks q , d'antiquarks \bar{q} et de photons γ , les abondances devaient respecter la proportion :

$$\frac{N_q - N_{\bar{q}}}{N_\gamma} \sim 3.10^{-8}. \quad (4.34)$$

L'excès des quarks sur les anti-quarks est ainsi 30 millions de fois plus faible que le rayonnement qui a été produit alors, c'est-à-dire 30 millions de fois plus faible que le nombre de quarks et d'antiquarks qu'il y avait avant le gel. Autrement dit, il y avait 30 000 001 quarks pour 30 000 000 antiquarks, et nous sommes faits de ce petit quark excédentaire.

Pour créer ce léger excès, Sakharov remarque que les trois conditions suivantes sont nécessaires :

- **Violation du nombre baryonique** : il faut en effet qu'il existe une réaction susceptible de créer ou de détruire plus de quarks que d'anti-quarks (c'est-à-dire plus de protons que d'antiprotons).
- **Violation de \mathcal{C} et de \mathcal{CP}** pour que la réaction miroir ne soit pas équiprobable, car elle créerait ou détruirait autant d'anti-quarks que de quarks.
- **Non équilibre thermique de l'univers** pour que les réactions réciproques dans le temps ne soient pas équiprobables.

Les modèles standards de la physique des particules et de la cosmologie nous disent que ces trois conditions ont pu être réunies lors de l'évolution de l'univers. La violation du nombre baryonique, même si elle n'est pas observable à nos échelles d'énergie est prédite par le modèle standard. La violation de \mathcal{CP} a été observée dans le système des kaons neutres comme nous l'avons vu précédemment. Le non équilibre thermique de l'univers n'est pas une condition difficile à imaginer.

Malheureusement, les calculs montrent que l'asymétrie créée par la violation de \mathcal{CP} que nous connaissons est beaucoup plus faible que celle qui est nécessaire pour rendre compte de l'asymétrie matière antimatière. Les physiciens soupçonnent alors qu'il existe une autre forme de violation de \mathcal{CP} , se manifestant à des énergies plus fortes et pas encore accessibles, et qui pourrait avoir engendré notre petit excès de matière.

Le mélange des quarks

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, les kaons sont en vérité composés de quarks. Le K^0 est formé d'un quark *down* (d) et d'un anti-quark *étrange* (\bar{s}). Le \bar{K}^0 est composé de leurs antiparticules : \bar{d} et s . Ces deux quarks s et d portent une charge électrique valant un tiers de la charge d'un électron. Aujourd'hui, les oscillations de kaons neutres s'expliquent par l'existence des diagrammes de la figure suivante.

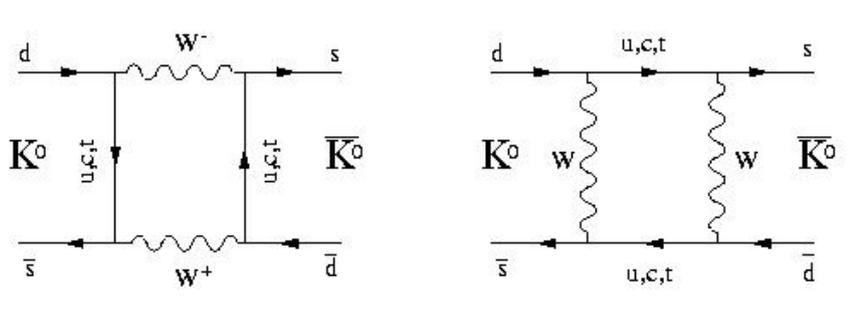


FIGURE 4.4 – Vision moderne de l'oscillation des kaons neutres.

Pour changer de nature, nos quarks doivent échanger deux W (bosons intermédiaires de l'interaction faible portant une charge ± 1) et deux quarks de charge $+2/3$. Ces quarks peuvent être le quark *up* que l'on trouve dans les protons (uud) ou les neutrons (udd), mais également n'importe quel autre quark de charge $+2/3$, avec des probabilités paramétrées par une certaine matrice de transition.

En 1973, les physiciens ne connaissaient que les trois quarks u , d et s . Ils soupçonnaient l'existence d'un quatrième quark (le *charm*, de charge $+2/3$), car ils en avaient besoin pour expliquer certains phénomènes. De fait, l'idée naissait que les quarks allaient par deux. En 1973 donc, Kobayashi et Maskawa remarquent que s'il existe une troisième paire de quarks, la violation de \mathcal{CP} apparaît naturellement⁸ dans les calculs des procédés de la figure 4.4.

Et en effet, en 1977 est découvert un troisième quark de charge $-1/3$, le quark *bottom* auquel certains physiciens esthètes préfèrent le qualificatif de *beau*. Il faudra attendre 1995, pour observer le troisième quark de charge $+2/3$, le quark *top*.

En fait, les calculs des diagrammes de la figure 4.4 nous donnent d'autres informations. S'il n'y a que trois familles de quarks, la violation de \mathcal{CP} est donnée par un unique paramètre (une phase dans la matrice de mélange). Il est alors possible de prédire l'amplitude de la violation de \mathcal{CP} dans des systèmes autres que celui des kaons neutres, à partir de l'amplitude mesurée dans ce système historique.

Des expériences (voir annexe ??) ont été spécifiquement conçues pour mesurer ces amplitudes dans le système (B^0, \bar{B}^0) . Les premiers résultats ont été publiés récemment et confirment les mesures issues du système des kaons neutres, confortant les hypothèses suivantes :

8. Pour nous en convaincre, il faudrait faire les calculs, qui relèvent de la théorie quantique des champs, ce que nous ne saurions faire dans ce cours.

- Le mélange des quarks rend bien compte de la violation de \mathcal{CP} et ce grâce à un unique paramètre.
- Il n'existe que trois familles de quarks.

Exercice : Maintenant que vous connaissez la nature intime des kaons neutres, vous pouvez essayer de comprendre pourquoi leurs désintégrations en $\pi^\pm l^\mp \nu$ permettent d'identifier s'ils sont des K^0 ou \bar{K}^0 , comme nous l'avons vu à l'équation 4.18. Vous vous souviendrez de la zoologie que vous avez appréhendée au chapitre 1.

Solution : Un K^0 contient les quark (\bar{s}, d) , et un π^- les quarks (\bar{u}, d) . Le quark \bar{s} du kaon se transforme en \bar{u} en émettant un W^+ . Le W^+ se désintègre en $l^+ \nu_l$ (ou l^+ peut être un positron ou un muon). Pour un anti-kaon, il se passe rigoureusement la même chose, mais avec toutes les antiparticules.

Chapitre 5

Entre relativité restreinte et mécanique quantique

Objectifs du chapitre. *C'est ici que convergent les aspects de mécanique quantique et de relativité restreinte présentés dans les chapitres précédents. Tout d'abord nous nous intéressons aux désintégrations de particules, en insistant notamment sur la durée de vie des particules et leurs modes de désintégrations. Ensuite, nous détaillons un exemple simple de traitement quantique des interactions, permettant entre autres de comprendre la nature de la liaison chimique, avec une ouverture sur les interactions entre particules élémentaires. Enfin, nous concluons sur une présentation de l'équation de Dirac et d'une de ses prédictions : l'existence de l'anti-matière.*

5.1 Les désintégrations

Les désintégrations des particules élémentaires sont un excellent terrain d'expérimentation, où la relativité restreinte et la mécanique quantique se manifestent et peuvent être testées. Outre le fait que les particules ne se désintègreraient pas sans $E = mc^2$, nos deux théories prédisent des comportements particuliers :

- La relativité restreinte prédit que les particules accélérées semblent vivre plus longtemps que les particules au repos.
- La mécanique quantique prédit que l'énergie (donc la masse dans son référentiel propre) d'une particule élémentaire susceptible de se désintégrer n'est pas parfaitement définie.

Ces deux caractéristiques sont parfaitement vérifiées dans le monde des particules élémentaires et montrent que ces dernières vivent bien dans un monde relativiste et quantique.

5.1.1 Bilan énergétique

La fameuse formule $E = mc^2$ autorise la désintégration d'une particule de masse m en particules plus légères (voir équation 2.111). L'énergie restante est alors emportée par les particules filles sous forme d'énergie cinétique. Bien entendu, la désintégration

n'est possible que si la somme des masses des particules filles est inférieure à la masse de la particule mère.

Quand nous écrivons $E = mc^2$, nous nous plaçons dans le référentiel du repos de la particule, là où son impulsion est nulle. Si nous nous plaçons dans un référentiel où la particule bouge, elle a évidemment plus d'énergie ($E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$). Mais ne vous y trompez pas, une particule accélérée ne peut se désintégrer en particules plus lourdes ! Il ne s'agit là que d'un changement de référentiel, la particule ne gagne pas de la masse. En revanche, si une particule est accélérée, ses filles le seront également, l'énergie cinétique de la mère se partageant entre les filles. Pour faire des calculs de désintégration en vol, vous ferez généralement les calculs d'abord dans le référentiel au repos, avant de passer au référentiel accéléré en appliquant les transformations de Lorentz (équations 2.41).

En 1896, Henri Becquerel observa par hasard la première des désintégrations connues à ce jour. Il s'agit de la désintégration β , dans laquelle un noyau N change de nature en émettant un électron et un anti-neutrino. En réalité, il s'agit de la conversion d'un neutron en proton à l'intérieur du noyau :



Il en existe bien d'autres, les seules particules stables¹ étant le proton, l'électron, le photon et les neutrinos.

Exercice : Dans un détecteur sensible aux seules particules chargées (chambre à brouillard, à bulles ou à fils) on observe deux particules issues d'un même point. En mesurant leur courbure dans un champ magnétique, on connaît leur impulsion \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . Montrez qu'en faisant l'hypothèse que ces deux particules sont les seules particules filles, ainsi qu'en supposant leur nature (c'est-à-dire leur masse m_1 et m_2), il est possible de mesurer la masse de la particule mère. Historiquement, c'est ainsi qu'en 1951, Armenteros et ses collaborateurs purent différencier deux nouvelles particules dans les rayons cosmiques. Sur un grand nombre d'événements, ils firent la supposition que les particules filles étaient des pions ou des protons et obtinrent deux populations distinctes : $\Lambda^0 \rightarrow p^+\pi^-$ ($m_\Lambda \sim 1100 \text{ MeV}/c^2$) et $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ ($m_K \sim 500 \text{ MeV}/c^2$)

Solution : $m^2 = (\sqrt{p_1^2 + m_1^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2})^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2$ (en prenant $c = 1$).

5.1.2 Durée de vie

Combien de temps vit une particule qui se désintègre ? On ne peut donner qu'une réponse statistique à cette question. Dans un ensemble de particules instables, il est

1. L'avenir nous dira peut-être le contraire, mais les limites actuelles sur leur temps de vie sont déjà fort élevées : $4,6 \cdot 10^{26}$ ans pour l'électron, environ 10^{31} ans pour le proton. Le photon étant rigoureusement de masse nulle, il n'est en principe pas possible qu'il se désintègre. Quant aux neutrinos, des résultats récents laissent penser qu'ils ont une masse, mais ils ne devraient pas pouvoir se désintégrer sans émettre leur lepton associé ; comme celui-ci est plus lourd qu'eux, c'est impossible.

raisonnable de penser que le nombre de désintégrations par unité de temps est proportionnel au nombre de particules présentes :

$$-dN \propto N \times dt,$$

ce qui conduit à la loi de décroissance :

$$N(t) = N(0) \times e^{-t/\tau} \quad (5.2)$$

où τ représente la durée de vie moyenne de ces particules. Son inverse, $\lambda = 1/\tau$ est appelé **taux de désintégration**. Cette loi est effectivement celle que l'on observe, par exemple sur une population de noyaux radioactifs.

En relativité restreinte, nous avons vu que le temps ne s'écoulait pas identiquement dans tous les référentiels. Si on observe la désintégration de particules au repos, nous pouvons mesurer leur durée de vie moyenne propre : τ_0 .

Si nous observons la désintégration de particules volant à une vitesse \vec{v} , leur durée de vie apparente est donnée par la formule 2.54 de dilatation des temps :

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.3)$$

Les particules en vol nous semblent vivre plus longtemps que ce qu'elles ne vivent en réalité, c'est-à-dire dans leur référentiel propre.

5.1.3 Désintégration quantique

En mécanique quantique, une particule évolue en suivant l'équation 3.11 :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi. \quad (5.4)$$

En physique classique, une particule est d'énergie définie. Que se passe-t-il si nous faisons la même hypothèse en physique quantique ? Cette particule devient état propre du Hamiltonien : $\mathcal{H}|\psi\rangle = E_0|\psi\rangle$. Son état est ainsi stationnaire et sa fonction d'onde vaut :

$$\psi(t) = \psi(0) \times e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}. \quad (5.5)$$

Puisqu'à tout instant $|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2$, la particule est éternelle. Par conséquent, la fonction d'onde d'une particule qui se désintègre ne saurait correspondre à un état propre du Hamiltonien, et n'est donc pas d'énergie définie. Cette idée est déroutante en soit. Développons-la et confrontons-la à l'expérience.

Avant tout, nous avons vu à l'équation 5.2 que la probabilité qu'une particule détectée à $t = 0$ existe encore à un instant t ultérieur est exponentiellement décroissante, ce qui peut s'écrire :

$$|\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle|^2 = e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5.6)$$

Le module de l'amplitude $\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle$ est donc connu, mais sa phase est arbitraire. Dans le cas d'une particule éternelle (durée de vie τ infinie), ou à une échelle de temps

pendant laquelle la particule paraît stationnaire ($t \ll \tau$), cette phase vaut $-E_0 t/\hbar$, conformément à l'équation 5.5. Par continuité, nous admettons :

$$\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle = e^{-\frac{t}{2\tau}} e^{i\frac{E_0 t}{\hbar}} \quad (5.7)$$

Quels sont les états d'énergie accessibles à cette particule ?

Considérons la base des états propres de l'énergie : $|E\rangle$, normalisés tels que

$$\langle E | E' \rangle = \delta(E - E')$$

et décomposons notre état $|\psi(0)\rangle$ sur cette base :

$$|\psi(0)\rangle = \int_E dE \rho(E) |E\rangle .$$

D'après le principe de décomposition spectrale, la loi de probabilité de l'énergie suivra la fonction $|\rho(E)|^2$. Notons qu'à ce stade, les énergies E peuvent tout à fait prendre des valeurs négatives.

Calculons l'amplitude $\langle \psi(t) | \psi(0) \rangle$ sur cette base d'états propres du Hamiltonien :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \psi(0) \rangle &= \langle \psi(0) | e^{i\frac{H}{\hbar}t} | \psi(0) \rangle \\ &= \int dE \int dE' \langle E' | \rho^*(E') e^{i\frac{H}{\hbar}t} \rho(E) | E \rangle \\ &= \int dE \int dE' \rho^*(E') \rho(E) \langle E' | e^{i\frac{H}{\hbar}t} | E \rangle \\ &= \int dE \int dE' \rho^*(E') \rho(E) e^{i\frac{E}{\hbar}t} \langle E' | E \rangle \\ &= \int |\rho(E)|^2 e^{i\frac{E}{\hbar}t} dE \end{aligned} \quad (5.8)$$

En identifiant les équations 5.7 et 5.8, il vient :

$$\begin{aligned} e^{i\frac{E_0}{\hbar}t} e^{-\frac{t}{2\tau}} &= \int dE |\rho(E)|^2 e^{i\frac{E}{\hbar}t} \\ e^{-\frac{t}{2\tau}} &= \int dE |\rho(E)|^2 e^{i\frac{E-E_0}{\hbar}t} \end{aligned} \quad (5.9)$$

ce que nous pouvons résoudre par transformée de Fourier. Nous obtenons² :

$$|\rho(E)|^2 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\Gamma}{\Gamma^2/4 + (E - E_0)^2} \quad (5.10)$$

où on a posé $\Gamma = \hbar/\tau$, homogène à une énergie.

2. Pour conduire le calcul, nous avons besoin de remarquer que l'équation 5.9, établie pour t positif au travers de l'équation 5.6, est identique à $e^{-\frac{|t|}{2\tau}} = \int dE |\rho(E)|^2 e^{i\frac{E-E_0}{\hbar}t}$ sur ce domaine d'intérêt. Or, un formulaire de transformées de Fourier nous apprend que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda|x|} e^{-ikx} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + k^2}$.

Que vaut E ? En relativité restreinte, dans le référentiel propre de la particule, il s'agit de l'énergie de repos m_0c^2 , donc de sa masse. Notant de même $E = mc^2$, l'équation 5.10 devient la relation de dispersion de masse suivante :

$$|\rho(m)|^2 = \frac{c^2}{2\pi} \times \frac{\Gamma}{\Gamma^2/4 + (m - m_0)^2c^4} \quad (5.11)$$

Cette formule est connue sous le nom de distribution de Breit-Wigner et mérite quelques commentaires.

Les particules qui se désintègrent n'ont pas une masse bien définie. Ceci est la manifestation d'un effet quantique et ne contredit nullement le fait que la masse est un invariant relativiste. La quantité Γ est communément appelée **largeur de la particule**, puisqu'elle s'interprète comme une dispersion de sa masse autour de sa valeur centrale m_0 .

Puisque nous avons dû considérer une base $\{|E\rangle\}$ d'états d'énergie E réelle, m pourrait *a priori* prendre des valeurs négatives, ce qui n'a pas de sens physique en relativité restreinte. Dans la pratique Γ est petite devant m_0 si bien que la distribution de Breit-Wigner s'étend très peu aux masses négatives. S'il existait des particules de largeur proche de leur masse, le traitement ci-dessus ne pourrait pas leur être appliqué.

Ceci dit, la loi de Breit-Wigner est-elle réalisée dans la nature? Autrement dit, devons-nous faire confiance à la mécanique quantique? Le temps de vie d'une particule est-il réellement lié à une dispersion de sa masse?

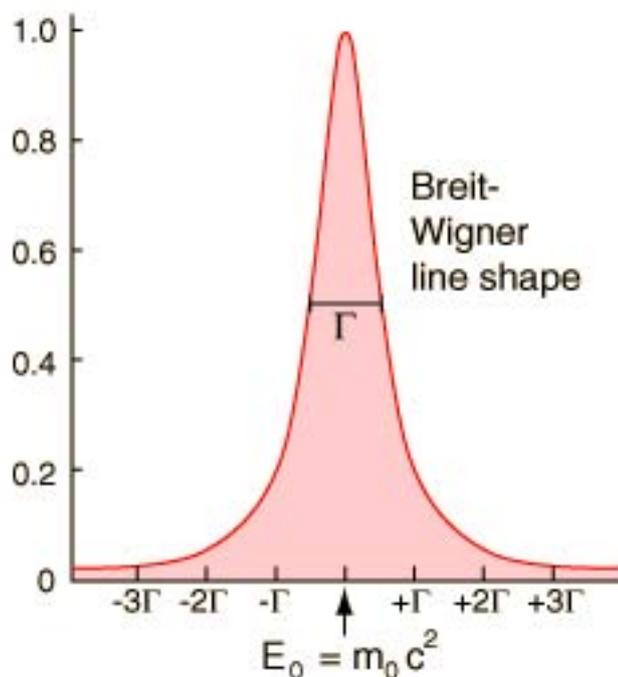


FIGURE 5.1 – La masse d'une particule se désintégrant n'est pas parfaitement définie mais suit une distribution de Breit-Wigner.

D'abord, penchons-nous sur les valeurs typiques des largeurs de certaines particules. La particule *élémentaire*³ ayant la plus grande durée de vie (non-infinie) est le neutron avec ces 886 secondes. La largeur associée vaut $\Gamma = \hbar/\tau = 7,4 \cdot 10^{-19}$ eV, absolument indécélable par des mesures directes de masse, puisque la masse d'un neutron est de 940 MeV/ c^2 . Il en va de même de toutes les particules les plus légères, dont les possibilités de désintégrations sont limitées. Le tableau ci-dessous résume les caractéristiques de ces particules, en donnant leur durée de vie mesurée, et – entre parenthèses car non mesurée – la largeur qu'on peut en déduire.

En revanche, pour certaines particules de masse plus élevée, on a bien mesuré un spectre de masse étendu, s'ajustant avec la courbe de Breit-Wigner et permettant de mesurer leur largeur Γ . Le premier exemple est le méson η , de largeur 1,2 keV pour une masse de 547 MeV, ce qui correspond à une durée de vie de $5,5 \cdot 10^{-19}$ s, malheureusement non mesurable. Certaines particules peuvent avoir des largeurs spectaculaires, comme le ρ avec ses 149 MeV, pour une masse seulement cinq fois supérieure. Le tableau ci-dessous s'arrête aux premiers exemples de telles particules, mais ils sont très nombreux.

Exercice : Vérifier que la loi 5.11 de distribution de masse est bien une loi de probabilité (positive et normée). Calculer, dans le cas le plus défavorable du tableau 5.1, la contribution relative du domaine des masses négatives.

Solution : Heureusement, cette contribution s'élève à 3,2% dans le pire des cas (le méson ρ^+). Nous voilà rassurés ! Le traitement que nous venons de donner est essentiellement correct.

5.1.4 Modes de désintégration

Une particule peut généralement se désintégrer en plusieurs ensembles de particules filles, en plusieurs **modes de désintégration**. Seules les particules instables les plus légères de chaque catégorie (le muon pour les leptons, les pions pour les mésons et le neutron pour les baryons) ne possèdent qu'un unique mode autorisé. Pour les autres, il est possible de mesurer les probabilités d'occurrence de ces différents modes et quelques exemples sont donnés dans le tableau 5.1. Ces probabilités sont appelées **rapports de branchement** et on les note B_k .

Quelque soit le mode de désintégration considéré, la durée de vie ou la dispersion de la masse mesurée est identique. La largeur Γ d'une particule ne dépend pas du mode dans lequel elle se désintègre et il s'agit bien d'une propriété intrinsèque de la particule. Néanmoins, on parle souvent de **largeur partielle** $\Gamma_k = B_k \times \Gamma$, et on a $\sum_k \Gamma_k = \Gamma$.

5.2 Petite théorie quantique de l'attraction

Le propos de cette section est de revisiter le concept de force d'attraction d'un point de vue quantique. Aujourd'hui, le cadre théorique dans lequel sont décrites les forces

3. Certains noyaux atomiques ont des périodes radioactives bien plus grandes. Les quarks, quant à eux, n'existent pas à l'état libre et il est impossible de leur attribuer un temps de vie.

Particule	Masse (MeV/c ²)	Largeur (MeV)	Temps de vie (seconde)	Proba. B_k	Mode
Quelques leptons (Nombre baryonique = 0)					
neutrino ν_e	$< 3.10^{-6}$	0	éternel	—	—
neutrino ν_μ	$< 0, 19$	0	éternel	—	—
neutrino ν_τ	$< 18, 2$	0	éternel	—	—
électron	0, 511	0	éternel	—	—
muon μ^-	106	(3, 0.10^{-16})	$2, 2.10^{-6}$	100%	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
tau τ^-	1777	(2, 3.10^{-9})	$2, 9.10^{-13}$	100%	nombreux
Quelques mésons (Nombre baryonique = 0)					
π^+	139	(2, 5.10^{-14})	$2, 6.10^{-8}$	100%	$\mu^+ \nu_\mu$
π^0	135	(7, 8.10^{-6})	$8, 4.10^{-17}$	99%	$\gamma \gamma$
				1, 2%	$e^+ e^- \gamma$
K^+	495	(5, 5.10^{-14})	$1, 2.10^{-8}$	63%	$\mu^+ \nu_\mu$
				21%	$\pi^+ \pi^0$
				6%	$\pi^+ \pi^+ \pi^-$
				5%	$\pi^0 e^+ \nu_e$
				3%	$\pi^0 \mu^+ \nu_\mu$
				2%	$\pi^+ \pi^0 \pi^0$
K^0	498	Ce cas très particulier est traité au chapitre 4			
η	547	$1, 2.10^{-3}$	(5, 5.10^{-19})	39%	$\gamma \gamma$
				33%	$3\pi^0$
				23%	$\pi^+ \pi^- \pi^0$
				5%	$\pi^+ \pi^- \gamma$
ρ^+	771	149	(4, 4.10^{-24})	100%	$\pi^+ \pi^0$
Quelques baryons (Nombre baryonique = 1)					
proton	938, 3	—	éternel	—	—
neutron	939, 6	(7, 4.10^{-25})	886	100%	$p^+ e^- \bar{\nu}_e$
Λ^0	1116	(2, 5.10^{-12})	$2, 6.10^{-10}$	64%	$p^+ \pi^-$
				36%	$n\pi^0$
Résonances Δ	1232	120	(5, 4.10^{-24})	99%	$n\pi$ ou $p\pi$
Quelques bosons (Nombre baryonique = 0)					
Photon	0	0	éternel	—	—
Z^0	91 188	2 495	(2, 6.10^{-25})	100%	paire $q\bar{q}$
W^\pm	80 400	2 140	(3, 1.10^{-25})	100%	nombreux

TABLE 5.1 – Temps de vie et modes de désintégration de quelques particules. Les quantités entre parenthèses ne sont pas mesurées, mais déduites de la relation $\Gamma \times \tau = \hbar$. Chacune de ces particules possède une antiparticule (à part le π^0 , le η , le photon et le Z^0 qui sont leur propre antiparticule) qui se désintègre avec le même temps de vie, les mêmes probabilités dans des modes similaires : il suffit de remplacer les particules filles par leurs antiparticules.

s'exerçant entre les particules élémentaires est la théorie quantique des champs (TQC), édifice complexe qu'il est impossible de décrire ici et qui concilie la relativité restreinte et la mécanique quantique. La petite théorie que nous allons développer n'a d'autres buts que de donner quelques idées sur la conception quantique de l'interaction, idées qui sont reprises avec beaucoup plus de rigueur et de profondeur en TQC.

Quelle interaction étudier ? Nous pourrions étudier la force électrostatique en $1/r^2$, dérivant d'un potentiel en $1/r$. La force d'attraction est bien connue et nous ne voyons pas la nécessité de la justifier plus avant. Et pourtant, nous verrons que cette force peut être réinterprétée à la lumière de la petite théorie quantique de l'attraction que nous allons échafauder ici.

Tournons-nous vers un système lié simple dont nous ne connaissons pas explicitement la force. Nous pourrions par exemple considérer la molécule de dihydrogène, composée de deux atomes d'hydrogène liés chimiquement. Soyons plus élémentaire et considérons l'ion dihydrogène moléculaire H_2^+ , composé de deux protons et d'un électron, et donc chargé positivement. Il s'agit de l'exemple le plus simple de liaison chimique que l'on puisse imaginer.

5.2.1 L'attraction chimique

Échange d'électron

En mécanique quantique, le système composé de deux protons et d'un électron ne peut être traité analytiquement – on ne sait pas résoudre son équation de Schrödinger – mais il est possible d'en faire un traitement simple et élégant. Connaissons-nous des états stables de cet édifice ? L'état $|1\rangle$ constitué d'un atome d'hydrogène au point a et d'un proton au point b infiniment éloigné l'est certainement. Réciproquement, l'état $|2\rangle$ dans lequel l'électron est lié au proton du point b et où le proton du point a est célibataire l'est également. Ces états sont présentés sur la figure 5.2.

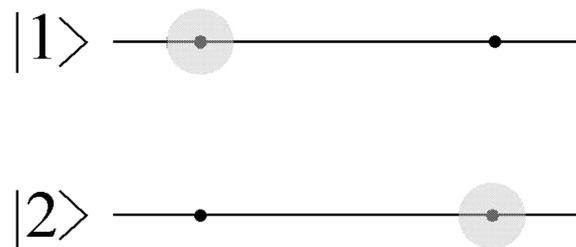


FIGURE 5.2 – Description des états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ de l'ion H_2^+ .

Bien entendu, les atomes d'hydrogène en a ou b peuvent être dans différents états, mais par souci de simplicité nous ne considérerons que l'état fondamental, le plus stable et le plus probable, d'énergie $E_0 = -13,6$ eV. C'est l'énergie qu'il faut pour arracher l'électron au proton et l'amener quelque part entre les points a et b infiniment éloignés. Classiquement, il est impossible pour l'électron de passer d'un proton à l'autre sans

apport d'énergie extérieure. Quantiquement, il existe une probabilité de réaliser une telle transition, par effet tunnel, dont l'amplitude sera notée A .

Disposant de ces deux états, on peut chercher les combinaisons linéaires de ceux-ci qui minimisent le Hamiltonien du système de sorte de trouver de *meilleures* solutions⁴. Les deux états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ étant rigoureusement symétriques, le Hamiltonien ne peut s'écrire sur la base de ces deux états que :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

En diagonalisant cet Hamiltonien on obtient les solutions approchées :

$$|I\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}} \quad |II\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.13)$$

$$E_I = E_0 + A \quad E_{II} = E_0 - A \quad (5.14)$$

Les états dégénérés $|1\rangle$ et $|2\rangle$ d'énergie E_0 se séparent ainsi pour donner deux états d'énergie $E_0 + A$ et $E_0 - A$. La quantité A est positive ; en effet, si on note $\phi_{1s}(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} \exp(-\frac{r}{a})$ la fonction d'onde de l'électron sur la couche $1s$ de l'atome d'hydrogène, on voit que :

$$-A = \langle 1|H|2 \rangle = \int d^3r \phi_{1s}^*(r_1) H \phi_{1s}(r_2) \leq 0 \quad (5.15)$$

où r_1 et r_2 sont les distances de l'électron⁵ aux deux protons, et H le hamiltonien : $-\hbar^2/2m\Delta - e^2/4\pi\epsilon_0(1/|r_1|^2 + 1/|r_2|^2)$. Par conséquent, l'énergie de l'état $|II\rangle$ est plus basse et le système a tendance à l'occuper (figure 5.3).

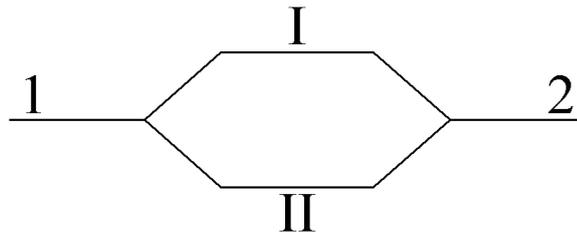


FIGURE 5.3 – Niveaux d'énergie de l'ion H_2^+ .

Que se passe-t-il si on part de l'état $|1\rangle$ à l'instant $t = 0$? L'équation 3.11 d'évolution ($H\phi = -i\hbar.\partial\phi/\partial t$) permet de calculer les amplitudes à un temps t quelconque :

$$\phi(t) = \left(\cos(A.t/\hbar).|1\rangle + i.\sin(A.t/\hbar).|2\rangle \right) \times e^{-(i/\hbar)E_0 t} \quad (5.16)$$

4. C'est la méthode variationnelle du polycopié de physique quantique de première année.

5. La variable a désigne le rayon de Bohr de l'électron : 53 pm.

L'amplitude oscille entre les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Par exemple, à $t = \frac{\pi\hbar}{2A}$, l'électron est dans l'état $|2\rangle$. Dans le monde quantique, les protons s'échangent l'électron. Notons que cet état n'est pas d'énergie définie. Le véritable état lié est l'état $|II\rangle$, dont l'énergie est $E_0 - A$. En s'échangeant l'électron, les deux protons ont une chance de tomber dans cet état et de se lier. **L'échange ou plutôt le partage de cet électron permet la liaison.**

La portée de l'interaction

A varie en fonction de la distance entre les deux protons. La probabilité de passer une barrière tunnel de largeur R et de profondeur E_0 évolue, pour une particule de masse m se trouvant au pied de la barrière, comme :

$$A \propto \frac{e^{-(\sqrt{2mE_0}/\hbar) \times R}}{R} \quad (5.17)$$

Dans notre cas, ceci représente la probabilité, pour une particule de passer dans l'état $|2\rangle$ quand elle est dans un puits de potentiel dans l'état $|1\rangle$.

A décroît donc avec le rayon et on obtient les niveaux portés sur la figure 5.4 à gauche. La force est attractive pour l'état le plus stable $|II\rangle$, et répulsive pour l'état $|I\rangle$. Du fait de l'exponentielle, elle varie très fortement aux alentours de $R_{min} = \hbar/\sqrt{2mE_0}$. L'application numérique donne, pour un électron, une portée de 0,5 ångström qui est bien l'ordre de grandeur typique de la liaison chimique. Sur la figure de gauche est portée l'évolution de l'énergie des deux états en fonction du rayon.

S'il n'y avait que cette attraction, les deux protons dans l'état $|II\rangle$ s'effondreraient l'un sur l'autre. À grande distance, tant que le proton nu voit l'édifice proton-électron comme un tout, il n'y a pas d'interaction coulombienne. Mais si le proton nu se rapproche, il pénètre le nuage électronique et commence à ressentir la répulsion coulombienne. Pour traiter le problème plus convenablement, il faut rajouter un potentiel ayant l'allure de la ligne pointillée de la figure 5.4.

Des calculs plus rigoureux combinant ses deux interactions (répulsion coulombienne et attraction par échange d'un électron) donne la figure de droite. L'état $|II\rangle$ possède alors un minimum de potentiel qui sera la position d'équilibre de la molécule.

Les particules virtuelles

La fonction d'onde d'une particule libre d'énergie cinétique définie (voir équation 3.15 page 80) est :

$$\phi = \frac{e^{\pm ip \cdot r/\hbar}}{r} \quad (5.18)$$

Cette équation est identique à celle que nous avons donnée pour A , la probabilité de franchir une barrière tunnel, pour peu que l'on prenne $p = \pm i\sqrt{2mE_0}$, et que l'on rejette la possibilité d'un comportement *explosif* de l'exponentielle pour R infini. Il peut paraître surprenant d'attribuer une impulsion imaginaire à une particule. Néanmoins,

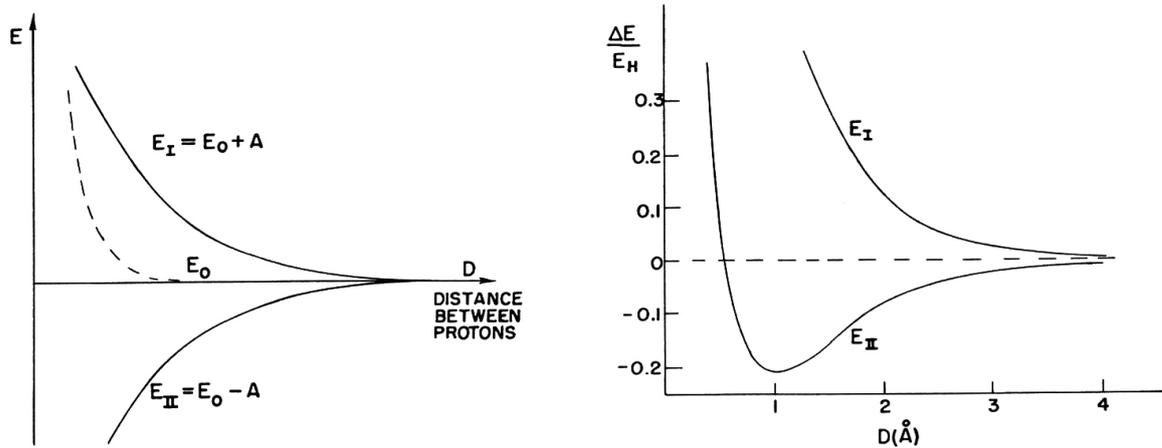


FIGURE 5.4 – Gauche : Allure des énergies des états stationnaires du système H_2^+ en fonction de la distance entre les protons. Droite : résultat d'un calcul plus rigoureux tenant compte de la répulsion coulombienne ($E_H = 13,6 \text{ eV}$).

demandons-nous quelle est l'énergie dont dispose l'électron pour passer la barrière tunnel? Dans une vision classique, il n'en a pas puisqu'il est confiné dans un puits de potentiel profond de E_0 . Mais si on fait l'exercice, *a priori* saugrenu, d'attribuer cette énergie négative à une particule libre :

$$\frac{p^2}{2m} = -E_0, \quad (5.19)$$

on obtient bien $p = \pm i\sqrt{2mE_0}$. Le passage de la barrière tunnel peut ainsi être traité comme le voyage d'une particule libre d'énergie négative, d'impulsion imaginaire.

Tout se passe donc comme si les deux protons s'échangeaient un électron d'impulsion imaginaire. Comme cette particule est inobservable lors de son passage de la barrière, on l'appelle une **particule virtuelle**.

Dans le cadre plus élaboré de la TQC, on retrouve les concepts que nous avons esquissés dans notre petit modèle : **les interactions entre particules sont modélisées par des échanges de particules virtuelles**. En TQC, une particule est dite **virtuelle** quand son impulsion et son énergie ne correspondent pas à sa masse réelle $m^2c^4 \neq E^2 - p^2c^2$.

5.2.2 L'interaction forte

En 1935, Yukawa tenta d'avoir une approche similaire de celle que nous venons de développer pour modéliser l'intense force d'attraction qui lie les protons et les neutrons au cœur des noyaux. Dans l'exemple précédent, la liaison était le fruit de la réaction élémentaire permettant l'échange d'un électron :



Quelles particules pourraient véhiculer l'interaction forte ? Aucun des candidats dont Yukawa disposait à l'époque ne pouvait remplir cet office et il postula l'existence de nouvelles particules : les pions. S'inspirant du fait que l'interaction faible autorisait déjà des transitions neutron-proton ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$), il proposa les réactions suivantes :

$$p^+ \rightarrow n^0 + \pi^+ \quad (5.21)$$

$$n^0 \rightarrow p^+ + \pi^- \quad (5.22)$$

$$p^+ \rightarrow p^+ + \pi^0 \quad (5.23)$$

$$n^0 \rightarrow n^0 + \pi^0 \quad (5.24)$$

D'après 5.21, un proton peut se transformer en neutron en émettant un pion positif. Ce pion positif est susceptible d'être absorbé par un neutron qui se transforme alors en proton, véhiculant ainsi l'interaction. Il est intéressant de noter qu'en plus de permettre l'interaction, les pions autorisent également un échange de la nature des nucléons.

Dans le procédé 5.20, l'énergie de H^0 est plus petite que celle de ses constituants d'une quantité E_0 que nous avons attribuée à l'électron, sous forme d'énergie cinétique négative. Dans le cas qui nous intéresse, le médiateur (le pion) n'est pas contenu dans l'émetteur (nucléon de gauche), dont la masse est quasiment égale à celle du produit (nucléon de droite), voire rigoureusement égale dans le cas d'un échange de pion neutre (5.23 et 5.24). Si la masse du pion est suffisamment grande – c'est le cas, nous le verrons *a posteriori* – devant la différence de masse du proton et du neutron ($1,3 \text{ MeV}/c^2$), le pion ne dispose d'aucune énergie pour véhiculer l'interaction. L'équation $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \simeq 0$ donne :

$$p = im_\pi c. \quad (5.25)$$

Ainsi, comme pour l'électron de H_2^+ , il est tentant d'attribuer une impulsion imaginaire au pion. En la reportant dans l'équation 5.18, on obtient le potentiel d'échange :

$$\frac{e^{-(m_\pi c/\hbar)r}}{r} \quad (5.26)$$

Pour estimer la valeur de m_π , Yukawa remarque que la portée typique de l'interaction forte est de l'ordre du fermi ($r_F = 10^{-15}m$). On obtient ainsi un ordre de grandeur de la masse des pions :

$$m_\pi = \frac{\hbar}{c.r_F} = 197 \text{ MeV}/c^2 \simeq 3,5 \cdot 10^{-28} \text{ kg} \quad (5.27)$$

Telle fut la prédiction de Yukawa : **l'interaction forte devrait être véhiculée par trois particules de charge $-1, 0$ et $+1$ et de masse de l'ordre de la centaine de MeV.** Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.3, les pions ont été découverts en 1947 et pèsent environ $140 \text{ MeV}/c^2$. Bien joué monsieur Yukawa !

5.2.3 L'interaction électromagnétique

Essayons maintenant d'appliquer un raisonnement similaire à l'électromagnétisme. On sait que l'interaction coulombienne répond à un potentiel en $1/R$. Si elle est véhiculée

par un médiateur, celui-ci doit être de masse nulle pour que l'équation 5.26 donne ce potentiel en $1/R$. On parle souvent de **portée infinie** de l'interaction électromagnétique.

Or il existe une particule de masse nulle dans le spectre des particules connues à l'époque : le photon, la particule de lumière. L'opération élémentaire pour un électron est ainsi :

$$e \rightarrow e + \textit{photon}. \quad (5.28)$$

Le photon émis est susceptible d'être absorbé par toute particule chargée, véhiculant ainsi l'interaction électromagnétique. Absorption et émission se font proportionnellement à la charge électrique de l'émetteur et du récepteur, de sorte qu'on obtient bien une force en $q_1 q_2 / r_{12}^2$, où r_{12} est la distance entre les charges q_1 et q_2 .

C'est en fait sur cette interaction que s'est développée la première théorie quantique des champs en interaction, connue sous le nom d'électrodynamique quantique (QED).

5.2.4 L'analogie des bateaux

En fait, la théorie que nous venons d'apercevoir, théorie selon laquelle les particules interagissent en échangeant des particules, possède une analogie classique. Imaginons deux personnes situées dans deux bateaux allant l'un vers l'autre. Comment peuvent-elles éviter la collision ?

Si l'une d'elle lance un objet à l'autre, elle lui communique une partie de son impulsion, opposée à la sienne. Il en va de même si l'autre renvoie l'objet. Si les deux protagonistes ont le temps et l'énergie de s'échanger suffisamment de fois l'objet, ils éviteront la collision et repartiront peut-être même en arrière.

Malheureusement, ce modèle classique ne permet pas de justifier d'une interaction attractive et l'analogie s'arrête ici.

5.2.5 Retour sur les particules virtuelles

Considérons deux particules (1) et (2) échangeant une particule q . Notons (1') et (2') les états finals, et supposons de plus que (1) et (2) ont la même masse. Dans le référentiel où la somme des impulsions initiales de (1) et (2) est nulle, référentiel dit *du centre de masse*, écrivons la conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0 \quad (5.29)$$

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 \quad (5.30)$$

Si $m_1 = m_2$ alors $E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_1^2 c^4 = p_2^2 c^2 + m_2^2 c^4 = E_2^2$, et, de manière analogue, $E'_1 = E'_2$. Par suite $E'_1 = E_1 = E_2 = E'_2$.

Cependant, l'échange de la particule q s'écrit $E_1 = E'_1 + E_q$, d'où $E_q = 0$. Or si on suppose que $E_q^2 = q^2 c^2 + m_q^2 c^4$, on obtient $\vec{q} = \vec{0}$ et $m_q = 0$!

De manière plus précise, considérons deux électrons s'échangeant un photon (de masse nulle), le raisonnement précédent implique que son impulsion est nulle, i.e. le photon ne se déplace pas !

Nous retiendrons donc que des particules virtuelles sont des particules pour lesquelles la relation $E_q^2 = q^2 c^2 + m_q^2 c^4$ n'est pas vérifiée. Dans le jargon de la théorie quantique

du champ, on dit aussi qu'elles sont **hors couche de masse**. Il est important de noter que ceci n'arrive **que pour des particules intermédiaires**, les particules des états final et initial vérifiant bien l'équation $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Ce comportement est parfois rapproché de l'inégalité d'Heisenberg $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ qui semble autoriser une indéfinition de l'énergie (donc de la masse) pendant des temps courts. Mais ne vous y trompez pas, l'énergie et l'impulsion sont bien conservées lors de ces processus.

5.3 Difficile succès d'une théorie quantique relativiste

5.3.1 Mécanique quantique relativiste

Il est intéressant de noter que l'équation de Klein-Gordon fut dérivée pour la première fois par Schrödinger, et avant même que celui-ci ne découvrit l'équation portant son nom ! Celui-ci cherchait une équation relativiste *et* quantique, et appliqua donc le principe de correspondance quantique :

$$\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad \text{et} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (5.31)$$

à la relation relativiste entre énergie et impulsion, soit $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$. Dans le cas classique, cette formule n'est autre que :

$$\frac{p^2}{2m} + V = E \quad (5.32)$$

L'opérateur résultant agit sur une fonction d'onde ψ sous la forme de l'équation de Schrödinger (équations 3.10 et 3.11) :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (5.33)$$

Procédons de même à la nuance près que l'on écrit l'équation relativiste sous forme tensorielle $p^\mu p_\mu - m^2c^4 = 0$, et que l'on fait $p_\mu \rightarrow i\hbar \partial_\mu$. Nous obtenons alors l'**équation de Klein-Gordon** :

$$-\hbar^2 \partial^\mu \partial_\mu \psi - m^2c^4 \psi = 0 \quad (5.34)$$

Ceci fait de l'équation de Schrödinger une *approximation non relativiste* de l'équation de Klein-Gordon.

Cependant, le succès de cette équation ne fut pas immédiat, car elle ne peut s'interpréter en tant qu'équation décrivant l'évolution de la densité de probabilité de présence d'une particule *unique*. Donnons à cela trois motivations.

1. **Densité de probabilité.** La densité de probabilité pour l'équation de Schrödinger est $\rho = \psi^* \psi$, et le courant de probabilité $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$. Ces deux grandeurs vérifient l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.35)$$

Ceci est transposable à l'équation de Klein-Gordon, mais, afin d'être proprement relativiste, la densité de probabilité ρ doit se transformer non pas comme un scalaire, mais plutôt comme la composante temporelle d'un 4-vecteur de composante spatiale \vec{j} , de sorte que l'équation de continuité devienne $\partial_\mu j^\mu = 0$. ρ est donc donnée par

$$\rho = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (5.36)$$

Le problème qui apparaît alors est que le signe de ρ est arbitraire : dans la mesure où l'équation de Klein-Gordon (5.34) est du second ordre, une solution n'est pleinement déterminée que par la donnée de *deux* conditions initiales, disons des valeurs arbitraires de ψ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Il est alors possible de choisir ces deux conditions de sorte que ρ prenne des valeurs négatives de manière au moins temporaire (alors que ρ devrait être positif et sommable pour garantir l'interprétation de la théorie en termes de probabilités). Remarquons que c'est cette intuition du fait que l'unitarité de la théorie est liée au premier ordre de l'équation d'évolution qui a conduit Dirac à proposer sa célèbre équation.

2. **Présence d'états d'énergie négative.** La relation énergie-impulsion relativiste dispose de deux solutions $E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$, ce qui veut dire que l'équation de Klein-Gordon (5.34) contient aussi bien des états d'énergie négative que des états d'énergie positive. Cet écueil peut être évité pour une particule libre dont l'énergie est constante, mais en présence d'interactions, une particule échange de l'énergie avec son environnement, et rien ne l'empêche alors de céder une quantité *infinie* d'énergie en tombant vers des états d'énergies *de plus en plus négatives*.
3. **Causalité.** L'amplitude de probabilité pour une particule *libre* de se propager de \vec{x}_0 à \vec{x} est⁶ $U(t) = \langle \vec{x} | e^{-iHt} | \vec{x}_0 \rangle$. Dans le cas relativiste, $E = \pm \sqrt{m^2 + p^2}$, et il est donc simple d'évaluer $U(t)$ en travaillant en représentation $|\vec{p}\rangle$ au lieu de $|\vec{x}\rangle$ de la manière suivante (on passe de (5.39) à (5.40) en travaillant en coordonnées polaires)⁷ :

$$U(t) = \langle \vec{x} | e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} | \vec{x}_0 \rangle \quad (5.37)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \langle \vec{x} | e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}_0 \rangle \quad (5.38)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}_0)} \quad (5.39)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2 |\vec{x} - \vec{x}_0|} \int_0^\infty dp p \sin(p|\vec{x} - \vec{x}_0|) e^{-it\sqrt{p^2+m^2}} \quad (5.40)$$

Cette intégrale peut être évaluée explicitement en termes de fonctions de Bessel. Son comportement asymptotique hors du cône de lumière (i.e. $|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 \gg t^2$) est très bien connu, et nous nous contenterons de savoir, grâce à la méthode de la phase stationnaire, que $U(t) \sim F(x, t) e^{-m\sqrt{x^2-t^2}}$ où $F(x, t)$ est une fraction

6. On allège les calculs en prenant $\hbar = c = 1$.

7. Par convention, la base des kets position est reliée à la base des kets impulsion par transformation de Fourier, i.e. $\langle p|q\rangle = \langle q|p\rangle = e^{-ipq}$.

rationnelle en x et t . Ceci montre donc que l'amplitude de propagation hors du cône de lumière est petite mais *non nulle*, et donc que cette interprétation de l'équation de Klein-Gordon viole la causalité.

Cependant, il était envisageable qu'une telle interprétation soit source de difficultés. Il n'est après tout pas légitime de supposer que tout phénomène relativiste puisse être expliqué en termes de particule unique, puisque la relation $E = mc^2$ permet la création de paires particules/antiparticules ; même lorsque l'énergie du système n'est pas suffisante pour cette création, des états à plusieurs particules apparaissent, existant pendant un temps très court Δt satisfaisant le principe d'incertitude $\Delta E \Delta t \geq \hbar$. On verra par la suite, dans le cadre de l'équation de Dirac, que l'interprétation correcte est celle d'une équation de champ, qui, après quantification, conduit au succès de l'interprétation en terme d'états multiparticulaires.

5.3.2 L'équation de Dirac

L'intuition essentielle de Dirac pour résoudre ce problème repose sur l'interprétation de la fonction d'onde en tant qu'amplitude de probabilité. L'équation de Klein-Gordon peut donner des probabilités négatives puisque la fonction d'onde vérifie une équation différentielle du second ordre. La résolution du problème consiste pour Dirac à remplacer l'équation d'onde par une autre du premier ordre dans les dérivées par rapport au temps, comme c'est le cas pour l'équation de Schrödinger :

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (5.41)$$

où H est une matrice à expliciter, fonction linéaire des dérivées d'espace.⁸ Ainsi, H prend la forme

$$H = -i\hbar c \alpha \cdot \nabla + \alpha_4 mc^2 \quad (5.42)$$

avec $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ des matrices constantes. A partir de (5.41) et (5.42), on trouve

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = H^2 \psi = -\hbar^2 c^2 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - i\hbar mc^3 (\alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + m^2 c^4 \alpha_4^2 \psi \quad (5.43)$$

(5.43) doit être en accord avec la forme de l'équation de Klein-Gordon (5.34). Ceci impose :

$$\begin{cases} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \mathbb{I} \\ \alpha_i \alpha_4 + \alpha_4 \alpha_i = 0 \\ \alpha_4^2 = \mathbb{I} \end{cases} \quad (5.44)$$

On obtient alors un ensemble de matrice 4×4 :

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Puisque l'équation est linéaire dans les dérivées par rapport au temps, et afin d'avoir une théorie invariante de Lorentz, on suppose que H est aussi linéaire en les dérivées d'espace.

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

Pour montrer que ce formalisme est invariant de Lorentz, on multiplie l'équation (5.41) à gauche par α_4 pour obtenir :

$$\left(\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2 \right) \psi = 0 \quad (5.46)$$

où

$$\gamma^\mu = -i\alpha_4\alpha^\mu \quad \text{et} \quad \gamma^0 = -i\alpha_4 \quad (5.47)$$

Les matrices γ^μ satisfont les relations d'anticommutation :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (5.48)$$

Ces relations de commutation sont invariantes de Lorentz en ce sens qu'elles sont satisfaites par les matrices $\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$ où Λ est une transformation de Lorentz. On en déduit alors que $\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu$ doit être relié à γ^μ par une transformation S telle que :

$$\Lambda_\nu^\mu \gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) \quad (5.49)$$

Il en découle que l'équation d'onde est invariante si la fonction d'onde se transforme suivant $\psi \rightarrow S(\Lambda)\psi$ sous les transformations de Lorentz $x^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu x^\nu$. La fonction d'onde à quatre composantes :

$$\psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}, t) \\ \psi_2(\vec{x}, t) \\ \psi_3(\vec{x}, t) \\ \psi_4(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

est appelée **spineur**. Les solutions en onde plane prennent la forme :

$$\psi(\vec{x}, t) = u(p) \exp\left(\frac{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)}{\hbar}\right) \quad (5.51)$$

où $u(\vec{p})$ est un spineur à 4 composantes vérifiant l'équation aux valeurs propres :

$$Hu(\vec{p}) = c \sum_i \alpha_i p_i u(\vec{p}) + \beta mc^2 u(\vec{p}) = Eu(\vec{p}) \quad (5.52)$$

Cette équation a quatre solutions, deux d'énergie positive $E = +E_p = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, correspondant aux deux orientations possibles du spin d'une particule de spin $\frac{1}{2}$, et deux solutions d'énergie négative $E = -E_p$.

Les états d'énergie négative ne peuvent être ignorés, dans la mesure où leur existence a des conséquences inacceptables. Par exemple, s'il existait de tels états inoccupés, alors des transitions des états d'énergie positive vers les états d'énergie négative peuvent se produire, avec pour conséquence l'instabilité des atomes tels que l'hydrogène.

Dirac a résolu ce problème en supposant que les états d'énergie négative sont presque tous remplis. Comme les électrons obéissent au principe d'exclusion de Pauli, l'image qu'a Dirac du vide est celle d'une mer d'états d'énergie négative, chacun avec deux électrons (un de spin *up*, l'autre de spin *down*), alors que les états d'énergie positive sont tous inoccupés. Un tel vide est indistinguable du vide naïf usuel ; en effet, à chaque état d'impulsion \vec{p} on peut associer un état d'impulsion $-\vec{p}$ qui donne au vide une impulsion totale nulle. Il en est de même pour le spin. Les énergies sont mesurées par rapport au vide, donc on peut dire que l'énergie de la mer de Dirac est nulle, et on peut définir sa charge électrique comme nulle car le potentiel électrostatique constant produit par l'ensemble des états d'énergie négative est nul. Cette mer a donc toutes les caractéristiques mesurables du vide naïf, et donc est inobservable.

Cependant, ce postulat résout le problème des transitions vers les états d'énergie négative. Quand un électron est enlevé du vide, celui-ci se trouve confiné dans une région d'énergie positive car tous les autres états d'énergie négative sont occupés. Ainsi, supprimer un état d'énergie $E = -E_p$, d'impulsion $-\vec{p}$, de spin $-\vec{S}$ et de charge $-e$ du vide produit un état (la mer avec un **trou**) d'énergie positive $E = E_p$, d'impulsion \vec{p} , de spin \vec{S} et de charge e . Les deux états sont en fait des descriptions équivalentes du même phénomène. En utilisant cette image, Dirac prédit l'existence d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ de masse celle de l'électron, mais de charge opposée. Cette particule, appelée **positron**, a été observée expérimentalement par Anderson en 1932.

L'équation de Dirac est applicable à toutes les particules de spin $\frac{1}{2}$, et la théorie des trous prédit que toutes les particules chargées de spin $\frac{1}{2}$ doivent avoir des antiparticules distinctes mais de même masse. Cet argument ne s'applique cependant pas aux bosons, qui n'obéissent pas au principe d'exclusion de Pauli sur lequel repose la théorie des trous. Montrer que des bosons chargés sont nécessairement associés à des antiparticules de charge opposée requiert la TQC.

Pour l'anecdote, la seule particule connue à l'époque de la prédiction de Dirac avec une charge positive opposée à celle de l'électron était le proton. Aussi, par prudence, Dirac identifia la particule dont il prédisait l'existence au proton. C'est pour cette raison que l'article de 1930 était intitulé *A Theory of Electrons and Protons*. Telle quelle, la théorie des trous faisait face à deux difficultés majeures :

- apparition d'une densité de charge infinie ;
- annihilation proton électron trop rapide pour que des édifices atomiques tels que l'hydrogène puissent être stables.

Dirac, dans les années 1930-1931, résolut ces deux problèmes en réinterprétant la densité de charge infinie de la mer d'électrons d'énergie négative comme l'énergie électrique de point zéro et décida que l'antiparticule de l'électron n'était pas un proton mais une nouvelle particule de même masse que l'électron, de charge et spin opposés à ceux de l'électron, qui fut baptisée **positron**.

Annexe A

Relativité restreinte : compléments mathématiques

A.1 Lemmes préparatoires

Lemme A.1 *Soit E un k -espace vectoriel de dimension n , et soient q, q' deux formes quadratiques sur E , non dégénérées, de cônes isotropes respectifs $C(q)$ et $C(q')$. Si $C(q) = C(q')$, et $C(q) \neq 0$, alors il existe $\lambda \in k^*$ tel que $q' = \lambda q$.*

Démonstration

□ Soit $x_0 \in C(q)$ non nul ; montrons que l'hyperplan H orthogonal à x_0 est le même au sens de q et q' . Pour cela, notons ϕ et ϕ' les formes bilinéaires associées à q et q' respectivement. Pour tout $\alpha \in k$ et $x \in E$, nous avons :

$$q(\alpha x_0 + x) = 2\alpha\phi(x_0, x) + q(x) \quad (\text{A.1})$$

ainsi qu'une équation analogue pour q' . Raisonnons par l'absurde en supposant distincts les hyperplans orthogonaux à x_0 au sens de q et q' ; il existe alors x tel que $\phi(x_0, x) = 0$ et $\phi'(x_0, x) \neq 0$. Soit alors $\alpha = -\frac{q'(x)}{2\phi'(x_0, x)}$. Nous savons d'après (A.1) que $\alpha x_0 + x \in C(q')$, d'où $q(\alpha x_0 + x) = 0$ par hypothèse d'égalité des cônes isotropes. Mais $2\alpha\phi(x_0, x) = 0$, donc $q(x) = 0$, toujours d'après (A.1). Par suite, nous avons :

$$q(x + x_0) = q(x) + \phi(x_0, x) + q(x_0) = 0 \quad (\text{A.2})$$

si bien que $q'(x + x_0) = 0$. Finalement,

$$0 = q'(x + x_0) = q'(x) + \phi'(x_0, x) + q'(x_0) = \phi'(x_0, x) \neq 0 \quad (\text{A.3})$$

ce qui est absurde.

Notons l_q et $l_{q'}$ les formes linéaires qui à $x \in E$ associent respectivement $\phi(x_0, x)$ et $\phi'(x_0, x)$. Ces deux formes s'annulent sur le même hyperplan H ,

et donc sont proportionnelles, i.e. il existe λ non nul (car $x_0 \neq 0$ et q et q' sont non dégénérées) tel que :

$$\phi'(x_0, x) = \lambda\phi(x_0, x) \quad (\text{A.4})$$

pour tout $x \in E$. Si nous prenons maintenant $x \notin H$, nous pouvons trouver α tel que $q(\alpha x_0 + x) = 0$, et donc $\alpha x_0 + x$ est aussi dans $C(q')$. Nous avons ainsi :

$$q(x) = -2\alpha\phi(x_0, x) = -2l_q(x) = -2\lambda l_{q'}(x) = -2\alpha\phi'(x_0, x) = \lambda q'(x) \quad (\text{A.5})$$

pour tout $x \notin H$.

Prenons alors x et y hors de H ; un des deux parmi $x+y$ et $x-y$ n'appartient pas à H , disons $x+y \notin H$. Compte-tenu de :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \quad (\text{A.6})$$

et de l'équation analogue pour ϕ' , il vient :

$$\forall x, y \notin H \quad \phi'(x, y) = \lambda\phi(x, y) \quad (\text{A.7})$$

Soit alors $x \in H$ et $y \notin H$. Nous calculons :

$$q'(x) = q'(x+y-y) \quad (\text{A.8})$$

$$= q'(x+y) + 2\phi'(x+y, y) + q'(y) \quad (\text{A.9})$$

$$= \lambda q(x+y) + 2\lambda\phi(x+y, y) + \lambda q(y) \quad (\text{A.10})$$

$$= \lambda q(x+y-y) \quad (\text{A.11})$$

$$= \lambda q(x) \quad (\text{A.12})$$

Nous pouvons donc conclure : nous venons de montrer que $q'(x) = \lambda q(x)$ pour $x \notin H$, et nous avons prouvé précédemment $q'(x) = \lambda q(x)$ pour $x \in H$, si bien que $q'(x) = \lambda q(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui établit le résultat énoncé. \square

Lemme A.2 *Les formules de changement de référentiels galiléens sont linéaires en les coordonnées d'espace et de temps.*

Démonstration

\square Pour simplifier, nous travaillons à une dimension d'espace. Nous notons \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux référentiels inertiels, \mathcal{R}' décrivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse V par rapport à \mathcal{R} . Nous notons x et t les coordonnées d'un événement dans \mathcal{R} , et x' et t' les coordonnées de ce même événement dans \mathcal{R}' . Nous supposons que tout mouvement rectiligne uniforme de vitesse v dans \mathcal{R} devient un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v' dans \mathcal{R}' .

Par isotropie et homogénéité de l'espace-temps, v' ne doit dépendre que de v et V .

Notons alors :

$$x' = X(x, t, V) \quad (\text{A.13})$$

$$t' = T(x, t, V) \quad (\text{A.14})$$

$$v' = K(v, V) \quad (\text{A.15})$$

Nous voulons montrer que X et T sont linéaires en x et t . A l'accoutumée, nous supposerons suffisamment régulières toutes les fonctions rencontrées.

Le fait qu'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v dans \mathcal{R} soit un mouvement rectiligne uniforme de vitesse v' dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$\partial_x X(x, t, V)v + \partial_t X(x, t, V) = K(v, V)\partial_x T(x, t, V)v + K(v, V)\partial_t T(x, t, V) \quad (\text{A.16})$$

pour tous x, t, v et V .

Si $v = V$, alors $K(v, V) = K(V, V) = 0$. Posons $r = x - Vt$ et $s = x + Vt$; nous avons :

$$\partial_x X = \partial_r X + \partial_s X \quad (\text{A.17})$$

$$\partial_t X = -V\partial_r X + V\partial_s X \quad (\text{A.18})$$

L'équation (A.16) devient :

$$\partial_x X(x, t, V)V + \partial_t X(x, t, V) = 0 \quad (\text{A.19})$$

ou encore :

$$2V\partial_s X(r, s, V) = 0 \quad (\text{A.20})$$

ce qui signifie que X ne dépend que de r . Il existe donc une fonction f telle que :

$$X(x, t, V) = f(x - Vt, V) \quad (\text{A.21})$$

Si $v = 0$, alors $K(v, V) = K(0, V) = -V$; la relation (A.16) s'écrit :

$$\partial_t X(x, t, V) = -V\partial_t T(x, t, V) \quad (\text{A.22})$$

Il existe alors une fonction g telle que :

$$T(x, t, V) = -\frac{1}{V}f(x - Vt, V) + g(x, V) \quad (\text{A.23})$$

Notant maintenant $\partial_1 f$ la dérivée de f par rapport à sa première variable, nous écrivons (A.16) sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x - Vt, V)v - V\partial_1 f(x - Vt, V) &= K(v, V) \left(-\frac{1}{V}\partial_1 f(x - Vt, V)v \right. \\ &\quad \left. + \partial_x g(x, V)v \right) + K(v, V)\partial_1 f(x - Vt, V) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Regroupons les termes de cette équation :

$$\partial_1 f(x - Vt, V) \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left(K(v, V) + V \right) = K(v, V) \partial_x g(x, V) v \quad (\text{A.25})$$

La seule dépendance en t dans cette dernière équation est portée par f , donc :

$$\partial_t \partial_1 f(x - Vt, V) = 0 \quad \text{ou encore} \quad \partial_1^2 f(x - Vt, V) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Il existe donc deux fonctions a et b telles que :

$$f(x - Vt, V) = a(V)(x - Vt) + b(V) \quad (\text{A.27})$$

Insérée dans (A.25), cette dernière expression donne :

$$a(V) \left(\frac{v}{V} - 1 \right) \left(K(v, V) + V \right) = K(v, V) \partial_x g(x, V) v \quad (\text{A.28})$$

Il apparaît que $\partial_x g(x, V)$ ne peut plus dépendre de x , donc g est linéaire en x . Nous l'exprimons en introduisant deux fonctions d et e telles que :

$$g(x, V) = d(V)x + e(V) \quad (\text{A.29})$$

Ces calculs montrent finalement que :

$$X(x, t, V) = a(V)(x - Vt) + b(V) \quad (\text{A.30})$$

$$T(x, t, V) = -\frac{1}{V} \left(a(V)(x - Vt) + b(V) \right) + d(V)x + e(V) \quad (\text{A.31})$$

Les expressions de X et T sont donc bien linéaires en x et t . \square

A.2 Calcul tensoriel

Rappels de dualité Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n ; on note E^* son espace dual. L'isomorphisme qui à tout élément $x \in E$ associe la forme linéaire sur E^* $u \mapsto u(x)$ est canonique. Les espaces E et E^{**} sont identifiés au moyen de cet isomorphisme. Le scalaire $u(x)$ sera noté $\langle x, u \rangle$ pour tous $x \in E$ et $u \in E^*$.

Si ϕ est une application linéaire de E_1 dans E_2 (les E_i sont des \mathbb{R} -ev), la transposée de ϕ , est l'application

$${}^t\phi : E_2^* \rightarrow E_1^* \\ u \mapsto u \circ \phi \quad (\text{A.32})$$

Ceci s'écrit encore

$$\forall x \in E_1 \quad \langle \phi(x), u \rangle = \langle x, {}^t\phi(u) \rangle \quad (\text{A.33})$$

On convient de noter x^i les composantes d'un vecteur $x \in E$ dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, et u_i les composantes d'une forme linéaire $u \in E^*$ dans une base $(f^i)_{1 \leq i \leq n}$. On désigne par (e^i) la base duale de (e_i) . On adopte la *convention de sommation d'Einstein* selon

laquelle un indice identique, écrit une fois en position supérieure et une fois en position inférieure dans une formule, indique une sommation par rapport à cet indice.

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. On note E^* et F^* leurs espaces vectoriels duaux. Pour $f \in E^*$, $g \in F^*$, $x \in E$ et $y \in F$, nous posons $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. On définit ainsi $f \otimes g$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$. C'est le *produit tensoriel* des deux formes linéaires f et g .

Si $\{e^1, \dots, e^p\}$ est une base de E^* , et $\{f^1, \dots, f^q\}$ une base de F^* , alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e^i \otimes f^j$.

Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$, et appelé *produit tensoriel* de E^* et F^* . Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij} e^i \otimes f^j$.

On sait d'autre part que tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^* , i.e. comme un élément de E^{**} . On peut donc appliquer le même schéma de construction à E^* et F^* afin de définir le produit tensoriel $E \otimes F \simeq E^{**} \otimes F^{**}$. Une base de $E \otimes F$ est alors $\{e_i \otimes f_j\}$, où $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ sont des bases de E et F .

On peut itérer ce processus et définir $E \otimes \dots \otimes E \otimes F \dots \otimes F$. Dans la suite, on se restreint au cas où $F = E^*$. On vient donc de construire un espace $E \otimes \dots \otimes E \otimes E^* \dots \otimes E^*$ où E apparaît s fois et E^* r fois. Les éléments de cet ensemble sont des formes $(r + s)$ -linéaires sur $E^* \times \dots \times E^* \otimes E \dots \otimes E$. Un tel élément s'écrit $T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r}$, c'est un *tenseur de type* (s, r) . On dit que les coefficients $T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s}$ sont les *coordonnées du tenseur* T dans la base (e_i) .

Un changement de base $e'_i = a^j_i e_j$ dans E se traduit par le changement $e'^i = (a^{-1})^i_j e^j$ de base duale. Les coordonnées du tenseur se transforment alors selon

$$T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} = (a^{-1})^{i_1}_{k_1} \dots (a^{-1})^{i_s}_{k_s} T_{l_1 \dots l_r}^{k_1 \dots k_s} a^{l_1}_{j_1} \dots a^{l_r}_{j_r} \quad (\text{A.34})$$

On dit que les indices supérieurs de T sont *contravariants*, et les indices inférieurs *covariants*.

Un réel est par convention un tenseur de type $(0,0)$ (aussi appelé *scalaire*). Ces tenseurs n'ayant pas d'indice, ils sont invariants par changement de base, ce qui est bien ce qu'on attend d'un scalaire. Un tenseur de type $(1,0)$ est un vecteur de E , et un tenseur de type $(0,1)$ une forme linéaire de E^* .

On dit qu'un tenseur $T = T^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s}$ est *symétrique* (resp. *antisymétrique*) si $T^{i_1 \dots i_s} = T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}}$ (resp. $T^{i_1 \dots i_s} = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(s)}}$) pour tout $\sigma \in \Sigma_s$, où Σ_s est le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, s\}$. Cette définition est indépendante du choix de la base.

Les opérations de produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir de tenseurs donnés.

Le *produit tensoriel* du tenseur

$$S = S_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p} \quad (\text{A.35})$$

avec le tenseur

$$T = T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r} \quad (\text{A.36})$$

est le tenseur

$$S \otimes T = S_{l_1 \dots l_p}^{k_1 \dots k_q} T_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_s} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_q} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_s} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_r} \quad (\text{A.37})$$

La *contraction* consiste à sommer sur l'un de ses indices hauts avec l'un de ses indices bas. Par exemple, la contraction de $\alpha \otimes X$ où $\alpha \in E^*$ et $X \in E$, est $\langle \alpha, X \rangle$, i.e. on somme un indice haut (X^i) et un indice bas (α_i) : $\alpha_i X^j \mapsto \alpha_i X^i$. Dans ce cas particulier, on obtient un scalaire. Dans le cas général, la contraction fait passer d'un tenseur de type (s, r) à un tenseur de type $(s - 1, r - 1)$.

Application $E \otimes E^* \simeq \mathcal{L}(E)$

On va montrer que $E \otimes E^*$ s'identifie canoniquement, en dimension finie, à $\mathcal{L}(E)$, espace vectoriel des endomorphismes de E . En effet, tout élément $M = M_j^i e_i \otimes e^j \in E \otimes E^*$ s'identifie à l'endomorphisme

$$v = v^i e_i \mapsto Mv = M_j^i e_i e^j(v) = (M_j^i v^j) e_i \quad (\text{A.38})$$

ce qui veut dire que (M_j^i) est la matrice de cet endomorphisme dans la base $\{e_i\}$ de E . Réciproquement, tout endomorphisme $M \in \mathcal{L}(E)$ se met sous forme d'une matrice (M_j^i) dans la base $\{e_i\}$, et donne l'élément $M_j^i e_i \otimes e^j \in E \otimes E^*$. Cette identification est indépendante du choix de la base $\{e_i\}$ de E , et donc est canonique.

Application aux opérations L'addition de deux tenseurs de même type et même ordre se traduit par l'addition des coordonnées, comme dans tout espace vectoriel.

Les composantes du produit tensoriel de deux tenseurs ne sont autres que le produit de leurs composantes.

Critères de tensorialité Il arrive qu'un objet relatif à E , mécanique, physique ou chimique, puisse se représenter dans chaque base de E par un système de coordonnées à plusieurs indices ; on peut alors raisonnablement se demander s'il n'existe par un tenseur sur E, E^* qui le représente intrinsèquement, i.e. qui, pour toute base de E , a les mêmes coordonnées que lui. Il y a une condition nécessaire et suffisante évidente, qui dit qu'un objet relatif à E , qui peut se représenter dans chaque base de E par un système de coordonnées, est un tenseur sur E, E^* si et seulement si par le passage d'une base à une autre, les formules de transformations sont du type de celles de (A.34).

Annexe B

Contrôle du 7 juin 2010

Ce contrôle porte sur les neutrinos, ces petites particules pleines de mystère. Les quatre exercices sont indépendants. Les apartés sont là pour votre culture, et pour amener des éléments permettant de traiter le quatrième exercice (indépendant et facile) dans lequel vous calculerez la contribution des neutrinos à la masse cachée de l'univers...

Exercice 1 : Découverte des neutrinos

Avertissement : les calculs sont plus agréables à mener dans un système d'unités où $c = 1$.

Nous nous intéressons aux désintégrations β des noyaux, dans lesquels un noyau N se transforme dans un autre noyau N' en émettant un électron. Dans un premier temps, nous supposons que seul un électron est émis : $N \rightarrow N' + e^-$. Le noyau N est **initialement immobile**.

Q1 Montrer que l'électron émis lors de la réaction $N \rightarrow N' + e^-$ a une énergie bien définie.

Q2 Donner son expression littérale exacte, ainsi que celle de son énergie **cinétique**.

Q3 Applications numériques :

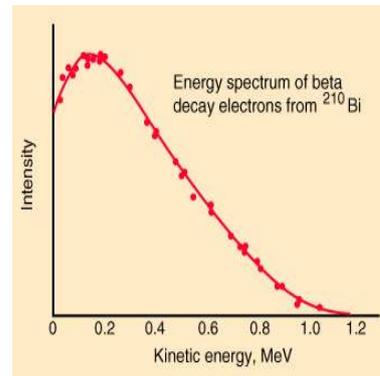
- Que vaut l'énergie cinétique pour la désintégration du neutron $n \rightarrow p + e^-$?
- Et pour celle du bismuth en plomb ? $^{210}\text{Bi} \rightarrow ^{210}\text{Pb} + e^-$?

On donne : $m_p = 938,27 \text{ MeV}/c^2$, $m_n = 939,57 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 0,51100 \text{ MeV}/c^2$, $m_{\text{Bi}} = 195,55752 \text{ GeV}/c^2$ et $m_{\text{Po}} = 195,55584 \text{ GeV}/c^2$ (pour les isotopes à 210 nucléons).

Expérimentalement, les électrons émis n'ont pas une énergie précise. Le nombre d'électrons d'énergie cinétique donnée suit la distribution ci contre.

Ceci amena Pauli à proposer l'existence d'une nouvelle particule, presque invisible car elle interagit très faiblement avec la matière, le neutrino : $N \rightarrow N' + e^- + \bar{\nu}_e$.

Ne connaissant pas encore la nature du neutrino, vous lui supposerez une masse m_ν .



- Q4** Expliquez rapidement que l'électron n'a plus une énergie cinétique bien définie.
- Q5** Quelle énergie cinétique **totale** est libérée lors de cette réaction ? Que vaut-elle dans l'exemple du bismuth ? En comparant ce résultat à la courbe précédente, en déduire que la masse du neutrino est négligeable devant celle de l'électron.
- Q6** En négligeant le recul du noyau fils N' (c'est-à-dire en négligeant son impulsion devant sa masse) donner la valeur **maximale** de l'énergie cinétique de l'électron.
- Q7** En déduire une méthode de mesure de la masse du neutrino.

Aujourd'hui, c'est cette méthode qui est utilisée pour estimer la masse des neutrinos. On utilise la réaction pour laquelle l'énergie disponible est la plus faible, la désintégration β du tritium en hélium : ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \nu$ (18,6 keV maximum). Pour l'instant, cette méthode ne permet que de mettre une limite supérieure à la masse du neutrino : $m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}/c^2$.

Aparté 1 : Combien de neutrinos ?

Le boson Z^0 est une des particules médiatrices de l'interaction faible. Sa masse est $91,2 \text{ GeV}/c^2$. Il est éclectique et peut se désintégrer en toutes paires quark-antiquark ou lepton-antilepton. Sa largeur de désintégration Γ est mesurable, par exemple dans le mode e^+e^- . Ses largeurs partielles de désintégration sont calculable dans le cadre du modèle standard, et certaines sont mesurables, comme $\Gamma_{e^+e^-}$, $\Gamma_{\mu^+\mu^-}$, $\Gamma_{\tau^+\tau^-}$, $\Gamma_{b\bar{b}}$, $\Gamma_{c\bar{c}}$...

Seules les largeurs de désintégration en neutrinos ne sont pas mesurables, mais elles restent calculables et sont égales entre elles : $\Gamma_{\nu\bar{\nu}}$. La connaissance, théorique ou expérimentale de ces largeurs de désintégration permet ainsi de mesurer le nombre N de saveurs de neutrinos :

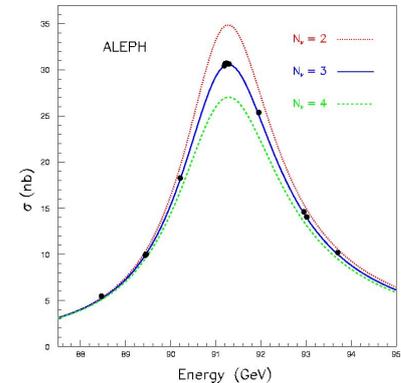
$$\Gamma = \Gamma_{e^+e^-} + \Gamma_{\mu^+\mu^-} + \Gamma_{\tau^+\tau^-} + \Gamma_{q\bar{q}} + N \times \Gamma_{\nu\bar{\nu}}.$$

L'étude de huit millions de Z^0 produits au CERN a permis d'effectuer cette mesure et montre qu'il n'existe que trois types de neutrinos (voir figure).

A priori, ce sont les trois neutrinos que nous connaissons et qui sont associés aux leptons électron, muon et tau. Des mesures directes sur leur masse, dans le même esprit que l'exercice 1, donnent les limites suivantes :

- $m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}/c^2$;
- $m_{\nu_\mu} < 190 \text{ keV}/c^2$;
- $m_{\nu_\tau} < 18,2 \text{ MeV}/c^2$.

Jusqu'ici, personne n'a mesuré de masse aux neutrinos et ils ont longtemps été considérés comme des particules de masse nulle.



Exercice 2 : Neutrinos cosmiques

Avertissement : les calculs sont plus agréables à mener dans un système d'unité où $c = 1$. On rappelle que les tableaux des pages 7 et 115 résument les principales caractéristiques des particules élémentaires les plus légères et donc les plus courantes.

Les rayons cosmiques sont essentiellement composés de protons qui nous viennent du cosmos. Ces rayons interagissent sur les nucléons des noyaux de la haute atmosphère et produisent une flopée – les physiciens appellent ça une gerbe – de particules que nous observons dans nos détecteurs au sol. Le but de cet exercice est d'estimer les proportions des différents neutrinos dans les rayons cosmiques : ν_e , ν_μ et ν_τ et leurs antiparticules.

La réaction primaire dominante est l'interaction d'un proton sur un nucléon (neutron ou proton) **par interaction forte** : $p + N \rightarrow \dots$. La majorité des protons cosmiques a une énergie cinétique inférieure à 1 GeV, ce qui permet de produire des particules dont la somme des masses vaut au plus $2,3 \text{ GeV}/c^2$.

Bien entendu, vous prendrez soin de **conserver tout ce qu'il y a à conserver** dans les questions suivantes.

- Q8** Combien attendez-vous de baryons dans l'état final ? Qui peuvent-ils être ?
- Q9** Est-il possible d'obtenir des leptons dans la réaction primaire ? Pourquoi ?
- Q10** Quels mésons peuvent être produits ? Pourquoi ?
- Q11** Résumez les particules qui peuvent être produites, **y compris par désintégrations successives** des particules primaires. Remarquez que seuls les pions, les

muons et les neutrons sont susceptibles de fournir des neutrinos. Vous vous limiterez à ces particules (et à celles susceptibles de les produire) pour les questions suivantes.

- Q12** Donnez la distance moyenne parcourue (dans le référentiel terrestre) par une particule d'énergie cinétique donnée, en fonction de sa masse, de son temps de vie propre et de son énergie cinétique.
- Q13** Les interactions primaires ont lieu à une altitude typique de 25 km. En supposant que l'énergie cinétique typique des particules cosmiques est de 500 MeV, estimez quelles particules se désintègrent avant d'arriver au sol.
- Q14** Quel type de neutrinos (électronique, muonique ou tauique) attendez-vous au sol ? Dans quelles proportions ?

Expérimentalement, on n'observe pas les proportions que vous avez dû trouver à la question précédente, ni même celles d'estimations plus correctes et plus détaillées. Des neutrinos μ semblent disparaître et se transformer en neutrinos τ , le nombre de neutrinos électroniques étant pour sa part conforme aux prédictions. Dès lors, nous sommes tentés de penser que les neutrinos oscillent et nous allons leur donner le traitement qu'ils méritent. Notons que ceci implique que les nombres leptoniques, pourtant conservés dans les collisions et les désintégrations, ne sont pas strictement conservés.

- Q15** Les neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) ne sont donc plus uniquement couplés à leur lepton associé (e, μ, τ) mais à un mélange de ces états. Inventez un diagramme de Feynman d'oscillation $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$.

Cette oscillation $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ vient d'être observée (communiqué de presse du CERN du 1er juin) par l'expérience OPERA dans le tunnel du Gran Sasso en Italie, qui a observé un événement τ dans un faisceau de neutrinos muoniques tiré par le CERN, à 730 km de là (<http://operaweb.lngs.infn.it/>).

Exercice 3 : Oscillation des neutrinos

Considérons des neutrinos d'impulsion p déterminée, créés quelque part, par exemple dans la haute atmosphère. Dans tout ce qui suit, on supposera que si m est la masse du neutrino considéré, et E son énergie, cette masse est si faible que dans les conditions expérimentales $E > mc^2$, soit, pour un neutrino de masse m :

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \simeq pc + \frac{m^2 c^4}{2pc}$$

On supposera aussi que **le neutrino se déplace en très bonne approximation à la vitesse de la lumière c .**

Soit H le Hamiltonien d'un neutrino libre d'impulsion p ; on désigne par $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$ les deux états propres de H d'énergies respectives E_1 et E_2 . On note m_1 et m_2 les masses des deux états, et on suppose $m_1 > m_2$.

Les états physiques de neutrinos produits ou détectés (par exemple en association avec un muon ou un tau), ne sont pas nécessairement $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$, mais éventuellement

des combinaisons linéaires de ceux-ci. On introduit un **angle de mélange** θ , a priori inconnu :

$$\begin{aligned} |\nu_\tau\rangle &= |\nu_1\rangle \cos \theta + |\nu_2\rangle \sin \theta \\ |\nu_\mu\rangle &= -|\nu_1\rangle \sin \theta + |\nu_2\rangle \cos \theta \end{aligned}$$

Si θ s'avère être nul, les états propres de l'énergie se confondent avec les états propres produits ou détectés.

Q16 Les masses des états ν_1 , ν_2 , ν_μ et ν_τ sont-elle définies ? Et leurs nombres leptoniques ?

Q17 À l'instant $t = 0$ (par exemple au CERN) on produit un neutrino ν d'impulsion p dans l'état ν_μ . Calculez son évolution $|\nu(t)\rangle$ en fonction de t sur la base $|\nu_1\rangle$ et $|\nu_2\rangle$.

Q18 Montrez que la probabilité que ce neutrino (produit dans l'état ν_μ à $t = 0$) soit détecté dans l'état ν_τ à l'instant t (par exemple dans OPERA) vaut, en fonction de $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ la différence des masses carré :

$$|\langle \nu_\tau | \nu(t) \rangle|^2 = \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\Delta m^2 c^4}{4p\hbar c} t \quad (\text{B.1})$$

Q19 Dans quelle mesure le fait que les neutrinos oscillent prouve-t-il qu'ils ne sont pas de masse nulle ?

Q20 On effectue cette détection sur une cible située à une distance L du point de production ; exprimer la probabilité calculée ci-dessus en fonction de L .

Q21 Expérimentalement, on mesure des oscillations des neutrinos cosmiques correspondant aux paramètres θ et Δm^2 de la figure suivante (gauche). Pour des impulsions typiques $p = 200 \text{ MeV}/c$, à quelle distance L le nombre de ν_μ détectés est minimum ? On rappelle que $\hbar c = 2 \times 10^{-7} \text{ eV}\cdot\text{m}$.

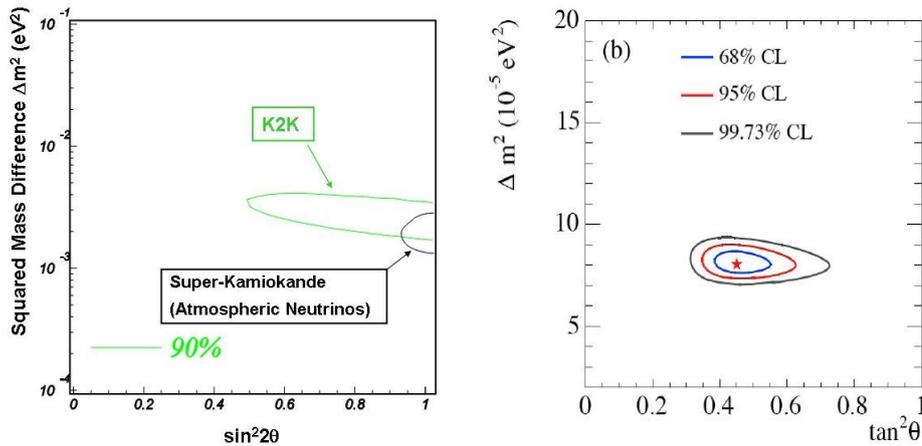
Aparté 2 : Paramètres d'oscillation

Neutrinos atmosphériques : $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. Nous avons vu que les neutrinos muoniques atmosphériques devenaient des ν_τ . L'estimation de leurs paramètres donne (figure de gauche) :

$$\begin{aligned} - \Delta m_1^2 &\simeq 2 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \\ - \sin^2(2\theta_1) &\simeq 1 \end{aligned}$$

Neutrinos solaires : $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ ou ν_τ . Le soleil nous envoie quant à lui des neutrinos électroniques. Sur terre, nous en recevons moins que ce que le modèle solaire prévoit. Ce modèle donnant par ailleurs des prédictions bien vérifiées, on pense que les neutrinos électroniques oscillent également, en ν_μ ou en ν_τ . L'estimation des paramètres donne (figure de droite) :

$$\begin{aligned} - \Delta m_2^2 &\simeq 8 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \\ - \tan^2 \theta_2 &\simeq 0,5 \end{aligned}$$



Exercice 4 : Masse cachée de l'univers

Les astrophysiciens ont constaté que la masse visible de notre univers n'est pas égale à la masse qui le fait tourner. Par exemple, les étoiles d'une galaxie tournent plus vite que ne l'autorise le potentiel gravitationnel créé par les étoiles se trouvant à l'intérieur de la galaxie. Typiquement, les étoiles visibles ne contribuent qu'à hauteur de 0,5 %.

De nombreuses hypothèses sont avancées pour expliquer cette masse manquante de l'univers. L'une d'entre elle est l'existence d'un flux de neutrinos massifs baignant tout l'univers.

Les calculs de cosmologie disent que les neutrinos peuvent contribuer à hauteur d'une proportion :

$$\Omega_\nu = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i c^2}{200 \text{ eV}}$$

Q22 En rassemblant les informations données en apartés et en conclusion des exercices précédents, estimer la contribution maximale des neutrinos à la masse cachée de l'univers.

Q23 Quelle est leur contribution minimale ?

Pour votre culture personnelle, sachez que le consensus actuel est que la masse de l'univers est portée par :

- des étoiles brillantes pour pas plus de 0,5 % ;
- des baryons sombres, sous forme de particules ou d'astres compacts : 4 % ;
- des particules interagissant faiblement : 22 % (les neutrinos en font partie, mais il y en a nécessairement d'autres, comme vous venez de le montrer) ;
- une forme d'énergie dite noire qui courberait l'univers sans être à proprement parler massive : 74 %.

Étonnant, non ?

Annexe C

Systèmes d'unités

En physique des particules, il est fréquent de travailler dans deux systèmes d'unités bien particulier :

- le système de Gauss ;
- un système dit d'unités *naturelles*, adapté aux ordres de grandeurs typiques de la physique des particules.

C.1 Unités de Gauss

Quand le concept de charge a été rencontré, il a semblé naturel d'introduire une nouvelle unité pour mesurer cette quantité. Cette nécessité disparaît cependant dès que l'on dispose de la loi de Coulomb. Dans ce cas, deux démarches sont possibles :

- Ou bien nous conservons les définitions antérieures de la charge (en Coulomb par exemple) et de la force (en kg.m.s^{-2}). Écrire la loi de Coulomb impose l'introduction d'une constante de conversion dimensionnée, la **constante diélectrique** ϵ_0 :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (\text{C.1})$$

- Ou bien nous renonçons à la définition indépendante de la charge électrique, et nous décidons de définir celle-ci par la loi de Coulomb exprimée sous la forme :

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \quad (\text{C.2})$$

Dans ce cas, la charge électrique se mesure en $\text{kg}^{\frac{1}{2}} \text{m}^{\frac{3}{2}} \text{s}^{-1}$. Ce système sera plus avantageux pour décrire les situations microscopiques. La charge électrique devient :

$$e \rightarrow \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad (\text{C.3})$$

En fait, la quantité ϵ_0 n'est qu'un facteur de conversion et ne porte pas d'information physique à proprement parler. En revanche, dans ce système d'unités, on rencontrera quand même l'équivalent de ϵ_r pour traiter de manière macroscopique les effets électromagnétiques de milieux matériels complexes.

C.2 Unités naturelles

Du point de vue de la physique des particules, il n'y a pas de raison conceptuelle profonde pour utiliser le kilogramme, le mètre et la seconde comme unités fondamentales. Ces grandeurs ne sont en effet pas du tout caractéristiques de l'échelle microscopique, mais bien dérivées de l'échelle humaine dans laquelle nous vivons.

Nous disposons de deux grandeurs dimensionnées caractéristiques des phénomènes mis en jeu en physique des particules : la vitesse de la lumière c qui nous vient de la relativité restreinte, et la constante de Planck \hbar qui nous vient de la mécanique quantique. Ces quantités traduisent un ordre de grandeur typique des vitesses et des actions¹ des particules élémentaires.

Il est donc naturel, en physique des particules, d'exprimer les quantités en fonction de ces paramètres. Reste à choisir une troisième quantité, pour pouvoir traduire toute quantité dépendante des unités de masse, de longueur et de temps. Les physiciens des particules prennent l'énergie, qu'ils expriment dans une unité typiquement particulière : l'électron-volt, énergie qu'acquière un électron soumis à une différence de potentiel de 1 Volt ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). L'énergie est une quantité plus pertinente que la masse pour deux raisons :

- la masse et l'énergie de repos sont équivalentes,
- l'énergie est une quantité conservée, pas la masse.

Toute quantité D , exprimée dans le système (masse, longueur, temps), peut aussi s'exprimer dans le système Énergie-Action-Vitesse, en unités naturelles, selon :

$$[D] = M^a L^b T^c = \text{eV}^\alpha \hbar^\beta c^\gamma. \quad (\text{C.4})$$

En convertissant les quantités d'un système dans l'autre, il vient :

$$\begin{aligned} \alpha &= a - b - c \\ \beta &= b + c \\ \gamma &= b - 2a \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} [\text{masse}] &= \text{eV} c^{-2} \\ [\text{temps}] &= (\text{eV})^{-1} \hbar \\ [\text{longueur}] &= (\text{eV})^{-1} \hbar c \\ [\text{impulsion}] &= \text{eV} c^{-1} \\ [\text{force}] &= (\text{eV})^2 \hbar^{-1} c^{-1} \\ [\text{pression}] &= (\text{eV})^4 \hbar^{-3} c^{-3} \\ [\text{charge}]^2 &= \hbar c \\ [\text{champ magnétique}] &= (\text{eV})^2 \hbar^{-\frac{3}{2}} c^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Plutôt que de conserver ces trois quantités, les physiciens des particules préfèrent généralement imposer $\hbar = c = 1$. Toutes les quantités physiques se retrouvent mesurées

1. L'action est la quantité dont la dimension est celle de \hbar , c'est-à-dire $M.L^2.T^{-1}$.

en puissances d'électrons-volts. Ceci peut paraître étrange, mais il s'agit de la même démarche que nous avons appliquée au système de Gauss, lorsque nous fîmes disparaître ϵ_0 de la loi de Coulomb en choisissant une *meilleure* charge électrique. Ici, nous nous débarrassons de c dans $E = mc^2$ ou de \hbar dans l'équation de Schrödinger. Ceci s'avère formellement extrêmement pratique. Par exemple, la métrique de Lorentz (équation 2.12) devient $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, expression plus symétrique en l'espace et le temps². La relation énergie-impulsion (équation 2.97) devient : $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, ce qui illustre mieux comment l'énergie d'une particule est constituée de sa masse et de son impulsion et dans des cas concrets quel est la contribution dominante, puisque les trois termes seront exprimés en eV.

Le problème de revenir aux unités de Gauss est simplifié en utilisant les facteurs de conversion :

$$\hbar c = 197,327\,053(59) \text{ MeV}\cdot\text{fm} \quad (\text{C.6})$$

$$\hbar = 6,5821220(20)\cdot 10^{-22} \text{ MeV}\cdot\text{s} \quad (\text{C.7})$$

$$1/c^2 = 1,78266181(15)\cdot 10^{-36} \text{ kg/eV} \quad (\text{C.8})$$

Enfin, dans ce contexte, la **constante de structure fine** $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c}$ devient :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \rightarrow \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} \quad (\text{C.9})$$

Dans le système d'unités naturelles, il s'agit d'une quantité sans dimension.

Finalement, nous pouvons faire le même raisonnement pour la **température**, unité que nous n'avons pas considérée au départ, car son emploi est plutôt rare en physique des particules. Nous utilisons alors la constante de Boltzmann ($E = k_B T$) pour établir la conversion entre électron-volt et kelvin :

$$k_B = 8,617343(15)\cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \quad (\text{C.10})$$

C.3 Exemple de l'électron

- L'énergie de repos d'un électron est 511 keV, donc en unités naturelles, la masse de l'électron est $m_e = 511 \text{ keV}/c^2$.
- Quelle longueur est $[511 \text{ keV}]^{-1}$? C'est :

$$l_e = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{\hbar c}{m_e c^2} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{511 \text{ keV}} = 385 \text{ fm}$$

C'est la longueur de Compton de l'électron.

- Quelle durée est $[511 \text{ keV}]^{-1}$? C'est :

$$t_e = \frac{l_e}{c} = 1,28 \cdot 10^{-21} \text{ s}$$

C'est le temps de vol d'un électron parcourant à la vitesse de la lumière la longueur de Compton associée à l'électron.

2. Nous avons contourné cette difficulté en posant $x^0 = ct$.

– Quelle fréquence est 511 keV ? C'est :

$$\nu_e = \frac{1}{t_e} = 7,8 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$$

C.4 Ordre de grandeur gravitationnel

L'intensité de la gravitation est déterminée par la constante de Newton G_N :

$$\begin{aligned} G_N &= 6,6742 (10) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2} \\ &= 6,7087 (10) \cdot 10^{-39} \text{ GeV}^{-2} \hbar c^3 \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Exprimée en unités naturelles, G_N est très petit. Une conséquence immédiate de ce fait est que l'interaction gravitationnelle entre particules est négligeable. Si nous calculons l'interaction gravitationnelle entre deux électrons séparés d'une longueur d'onde de Compton, nous obtenons un nombre de l'ordre de 10^{-45} .

Réciproquement, on s'attend à ce que les effets de gravité quantique se manifestent aux échelles suivantes :

$$E_{\text{Planck}} = \left(\frac{\hbar c^3}{G_N} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \quad (\text{C.12})$$

$$l_{\text{Planck}} = \left(\frac{\hbar G_N}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} = 1,7 \cdot 10^{-35} \text{ m} \quad (\text{C.13})$$

Retenons qu'à l'heure actuelle, nous avons testé la physique que nous connaissons jusqu'à des énergie de l'ordre du TeV, donc des distances de l'ordre de 10^{-18} m, et la gravité elle-même jusqu'au millimètre...

Bibliographie

- [1] A.O. Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, Dover 1964.
- [2] J.L. Basdevant et J. Dalibard, *Mécanique quantique*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [3] W.N. Cottingham, D.A. Greenwood, *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*, Cambridge University Press, 1998.
- [4] R.P. Feynman, *Le cours de physique de Feynman, Électromagnétisme 1*, Interéditions, 1995.
- [5] R.P. Feynman, *Le cours de physique de Feynman, Mécanique 2*, Interéditions, 1995.
- [6] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, International Series in Pure and Applied Physics, McGraw-Hill, 1965.
- [7] David Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, Inc., 1987.
- [8] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's relativity*, Clarendon Press, 1992.
- [9] J.D. Jackson, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1975.
- [10] L. Landau, E. Lifchitz, *Physique théorique, tome 1, Mécanique*, Editions Mir, 1982.
- [11] L. Landau, E. Lifchitz, *Physique théorique, tome 2, Théorie des champs*, Editions Mir, 1989.
- [12] W. Pauli, *Theory of relativity*, Pergamon Press, 1958.
- [13] A. Rougé, *Introduction à la physique subatomique, tomes 1*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [14] A. Rougé, *Introduction à la physique subatomique, tomes 2*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [15] F. Halzen et A.D. Martin *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, 1984.
- [16] A. Rougé, *Introduction à la relativité*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [17] J.H. Smith, *Introduction à la relativité*, Masson, 1997.
- [18] E.F. Taylor et J.A. Wheeler, *A la découverte de l'espace-temps et de la physique relativiste*, Dunod, 1970.
- [19] H. Yilmaz, *Introduction to the theory of relativity and the principles of modern physics*, Blaisdell Publishing Company, 1965.
- [20] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html>
- [21] Usenet Physics FAQ, <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/index.html> (miroir).

Index

- Action (unité), **140**
- Ailleurs, **33**
- Antimatière (asymétrie), **104**
- Antimatière (propriétés), **2**
- Antiparticule, **2**

- Baryon (définition), **4, 10**
- Baryonique (nombre), **4**
- Beauté (découverte), **17**
- Boost, **40**
- Boson de Higgs, **22**
- Bosons médiateurs, **18**
- Bottom (découverte), **17**
- Breit-Wigner (distribution), **113**

- Charme (découverte), **14**
- Compton (effet), **74**
- Compton (longueur d'onde), **75**
- Cone de lumière, **31**
- Conjugaison de charge, **99**
- Contraction, **48**
- Contraction des longueurs, **34**
- Contravariant, **48, 131**
- Convention d'Einstein, **130**
- Couche de masse, **122**
- Covariant, **49, 131**
- Covariante (loi), **48**

- Diagrammes de Feynman, **18**
- Dilatation du temps, **33**
- Dirac (mer), **125**
- Dirac (équation), **124**
- Dualité onde-corpuscule, **71**
- Durée de vie, **111**
- Désintégration, **109**
- Désintégration (largeur), **113**
- Désintégration (mode), **114**
- Désintégration (taux), **111**

- Effondrement du paquet d'onde, **83**
- Einstein, **23, 73**
- Elastique (collision), **66**
- Electron (diffraction), **75**
- Electron (découverte), **1**
- Energie cinétique, **56**
- Energie de repos, **55**
- Energie de seuil, **61**
- Equation aux valeurs propres, **82**
- Equation d'évolution, **79**
- Equation de Schrödinger, **79**
- Etrangeté, **6**

- Faible (interaction), **21**
- Feynman (diagrammes), **18**
- Forme fondamentale, **50**
- Forte (interaction), **20**

- Gluons, **20**
- Gravitation (constante), **142**
- Graviton, **22**

- Hadron (définition), **4**
- Hamiltonien, **79**
- Heisenberg (incertitude), **81**
- Helicité, **87**
- Higgs (boson), **22**
- Horloge (hypothèse), **43**
- Hypercharge, **8**
- Hypéron (découverte), **5**

- Interactions fondamentales, **18**
- Intervalle, **30**
- Inélastique (collision), **66**
- Isospin, **8**

- J/psi (découverte), **14**

- Kaon (découverte), **5**

- Kaons (neutres), **89**
 Kaons (oscillation), **93**
 Klein-Gordon (équation), **122**

 Largeur de désintégration, **113**
 Lepton (définition), **4**
 Leptonique (nombre), **13**
 Longueur (contraction), **34**
 Longueur propre, **46**
 Lorentz (contraction), **46**
 Lorentz (groupe), **41**
 Lorentz (matrice), **38**
 Lorentz (transformation), **38**
 Lorentz (transformations spéciales), **40**

 Masse (bilan), **62**
 Masse (bosons médiateurs), **19**
 Masse (hadrons), **7**
 Masse (nulle), **86**
 Masse (quarks et leptons), **17**
 Mesures (résultat), **82**
 Mesures (simultanées), **83**
 Michelson-Morley (expérience), **26**
 Minkowski (tenseur), **50**
 Moment cinétique, **84**
 Moment cinétique (addition), **87**
 Moment cinétique (conservation), **87**
 Moment cinétique (intrinsèque), **86**
 Muon (découverte), **3**
 Méson (définition), **4, 10**

 Neutrino (découverte), **2**
 Neutrino (hélicité), **98**
 Neutrino (muonique), **13**
 Neutrino (tau), **17**
 Neutrino (électronique), **13**
 Neutron (découverte), **2**
 Neutron (désintégration), **22**

 Onde (fonction), **78**
 Onde (paquet), **80**

 Parité (définition), **97**
 Parité (intrinsèque), **97**
 Particules (désintégration), **115**
 Particules (spin), **86**

 Particules stables, **110**
 Particules virtuelles, **118**
 Photon (boson médiateur), **18**
 Photon (découverte), **2**
 Photon (quantum de lumière), **73**
 Photoélectrique (effet), **72**
 Pions (découverte), **3**
 Pions (prédiction), **120**
 Planck (constante h), **72, 141**
 Planck (énergie et longueur), **142**
 Poincaré (groupe), **41**
 Positron (découverte), **2**
 Positron (prédiction), **126**
 Principe de correspondance, **82**
 Principe de décomposition spectrale, **83**
 Principe de superposition, **78**
 Principe des opérateurs associés, **82**
 Produit tensoriel, **131**
 Proton (découverte), **2**

 Quadri-impulsion, **58**
 Quadrivecteur, **47**
 Quadrivecteur (courant), **53**
 Quadrivecteur (force), **60**
 Quadrivecteur (onde), **52**
 Quark (découverte), **10**

 Rapport de branchement, **114**
 Référentiel (centre de masse), **121**
 Référentiel (de repos), **42**
 Résonance, **6, 66**

 Scalaire, **49**
 Schrödinger (equation), **79**
 Section efficace, **64**
 Seuil de réaction, **61**
 Spin (moment cinétique intrinsèque), **86**
 Spineur, **125**

 Tau (découverte), **17**
 Temps (dilatation), **33**
 Temps propre, **42**
 Tenseur, **131**
 Tenseur (mixte), **49**
 Tenseur (métrique), **50**
 Tenseur (valence), **49**

Top (découverte), **17**

Trou, **126**

Unités, **139**

Vertex, **18**

Violation de C, **99**

Violation de CP, **102**

Violation de la parité, **98**

Violation de T, **103**

Virtuelle (particule), **118**

Volume propre, **46**

W (boson médiateur), **21**

Z (boson médiateur), **21**

