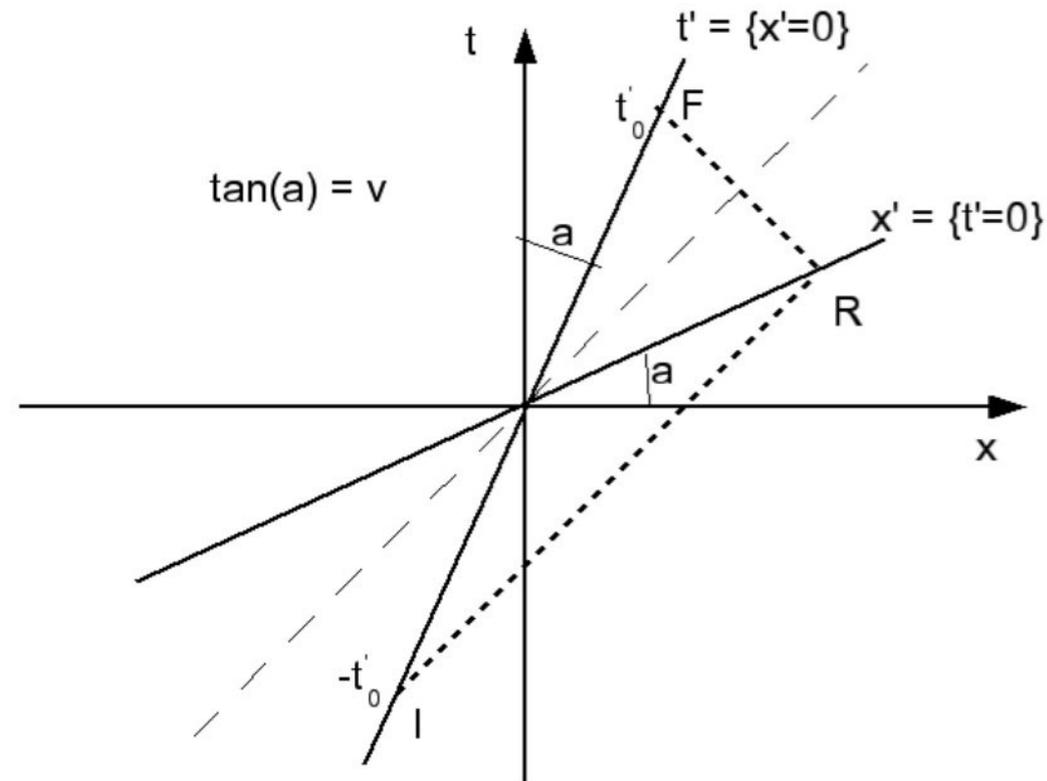


Relativité restreinte (Einstein, 1905)

- Découle de :
 - Relativité galiléenne : invariance des lois de la physique par chgt de référentiel inertiel
 - Invariance de la vitesse de la lumière par chgt de réf.
- Remet en cause :
 - Notion de temps absolu
 - Notion de simultanéité
- Lois de la mécanique classique modifiées :
 - Composition des vitesses
 - Dynamique (aujourd'hui)



Transformation de Lorentz

Loi de Composition des Vitesses

- V = vitesse de $R'(x',y',z',t')$ par rapport à $R(x,y,z,t)$ (constante)
- Dilatation du temps
- Objet se déplace avec une vitesse $v'=(v_x',v_y',v_z')$ dans R' :

$$\beta = \frac{v}{c} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + v_x' \frac{V}{c^2}}$$

$$v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v_x' \frac{V}{c^2}}$$

$$v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + v_x' \frac{V}{c^2}}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{cases}$$

“Boost” de vitesse V

Sous forme matricielle :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

Espace de Minkowski, Tenseur Métrique, Groupe de Poincaré, Quadri-vecteur

- Espace de Minkowski = \mathbb{R}^4 muni du pseudo-produit scalaire : $a \times b = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \times \vec{b}$
 $= a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$

- Tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$

- Intervalle entre deux événements $ds^2 =$ pseudo-norme

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Groupe de Poincaré** = groupe des transformations de \mathbb{R}^4 qui conservent l'intervalle ds^2 :

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- Rotations dans un plan (t,x) : “boost”
- Rotations de \mathbb{R}^3
- Symétries et translations
- On appelle quadri-vecteur un vecteur de l'espace de Minkowski (**c-a-d de norme invariante par transf. de Lorentz !**)
 - Ex: quadrivecteur position (t,x,y,z)

- Note : en relativité générale, le tenseur métrique est “quelconque”. $\eta_{\mu\nu}$ est un cas particulier d'espace plat

Introduction au Calcul Tensoriel

- Soit \mathbf{E} espace vectoriel
- \mathbf{E}^* son espace dual = espace des formes linéaires $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$
- Déf. : Tenseur d'ordre covariant n et contravariant m (ou tenseur (m,n)) = forme multilinéaire de $\mathbf{E}^m \times \mathbf{E}^{*n}$ dans \mathbf{R}
- Ex : tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ de rang $(2,0)$
- Notation d'Einstein : somme sur les indices répétés
- Le tenseur métrique “descend” les indices; son inverse les “monte”.

- Produit scalaire :

$$x \cdot y = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x_\nu y^\nu$$

$x^\mu =$ vecteur (contravariant)

$$\begin{aligned} x_\mu &= 'x.' = \eta_{\mu\nu} x^\nu \\ &= \text{forme linéaire} \\ &= \text{vecteur covariant} \end{aligned}$$

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu$$

$$\eta^{\mu\nu} = (\eta_{\mu\nu})^{-1}$$

- Transformation de Lorentz :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu ; x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$$

avec : $\Lambda_\mu^\nu = \eta^{\nu\rho} \Lambda^\alpha_\rho \eta_{\mu\alpha}$

On peut montrer que :

$$(\Lambda^\mu_\nu)^{-1} = \Lambda_\mu^\nu$$

Quadri-vitesse, Quadri-impulsion

- Comment re-définir l'impulsion et l'énergie en relativité ?

- Par analogie avec méca classique

- En respectant l'invariance par transformation de Lorentz

- Quadri-vitesse :

- $$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v}) = (u^0, \vec{u})$$

- **dτ** = temps propre de la particule. $dt = d\tau / \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma d\tau$

- Quadri-impulsion : **p (ou p^μ) = m.u^μ = m dx^μ/dτ**

- **U^μ** et **p^μ** sont des quadri-vecteurs car **x^μ** en est un et **dτ** est invariant.

- Par changement de référentiel, la quadri-impulsion suit la transformée de Lorentz correspondante.

- Voyons les conséquences d'une telle définition...

Quadri-impulsion, Énergie de Repos ($E_0=mc^2$), etc...

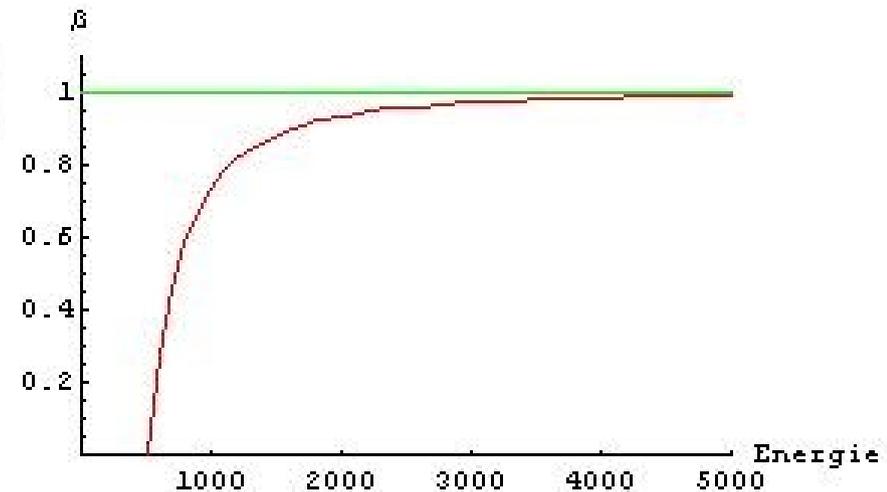
- Quand $v \rightarrow 0$, p^0 tend vers $mc^2 + mv^2/2 + o(mv^2)$
- On postule :
 - Énergie = p^0
 - Impulsion = (p^1, p^2, p^3)

Énergie au repos non-nulle !

Énergie cinétique classique

$$p^\mu = mu^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

- Quand $v \rightarrow c$, $E \rightarrow \text{infini}$
 - Impossible d'atteindre c pour une particule massive



| Impulsion | Énergie | Relation E-p | E de repos | E cinétique |
|------------------------------|-------------------|---------------------------------|--------------|--------------------------|
| $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ | $E = \gamma mc^2$ | $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ | $E_0 = mc^2$ | $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ |

Quadri-impulsion du photon

- Considérons E fixée, et $m \rightarrow 0$: $v \rightarrow c$ et $p \rightarrow E$
 - $E^2 = \vec{p}^2 c^2$
 - $P^2 = m^2 = 0$
- Pour une particule de masse nulle, on a nécessairement :
 - $v = c$ (ds tt réf.) : il n'existe pas de référentiel de repos !
 - Dilatation du temps infinie : le temps ne s'écoule pas !

Conservation de l'Énergie et de l'Impulsion

- De même qu'en mécanique classique, on postule la conservation de l'énergie (masses incluses !) et de l'impulsion

→ **Donc conservation du quadri-vecteur impulsion**

- **Référentiel du centre-de-masse = Réf. / impulsion totale = 0**

→ **Énergie dans le réf. du centre-de-masse = énergie disponible pour produire des particules**

$$\rightarrow \sqrt{p^2} = E_{\text{centre-de-masse}} = \sum m_i + \sum E_{i,\text{centre-de-masse}}^{\text{cinétique}} \geq \sum m_i$$

- Désintégration : $A \rightarrow B_1 + B_2 + B_3 + \dots$

→ $E_i \geq m_i$ et dans réf. du centre-de-masse, $E_A = m_A$ donc :

$$m_A \geq m_1 + m_2 + m_3 + \dots \text{ (sinon, désintégration impossible)}$$

→ Dans réf. de centre-de-masse, l'impulsion est nulle. donc

$$m_A = E_1 + E_2 + E_3 + \dots$$

→ Ex: désintégration des Pions neutres

- Collision de 2 particules : $A_1 + A_2 \rightarrow B_1 + B_2 + B_3 + \dots$

→ Ex: Interaction proton sur cible fixe; Cosmic Microwave Background

Effet Doppler relativiste

- **Effet Doppler Longitudinal** : Référentiel R' a vitesse β par rapport à R, dans la même direction et sens opposé au photon.
 - Transformation de Lorentz pour un boost donne :

$$E' = E \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

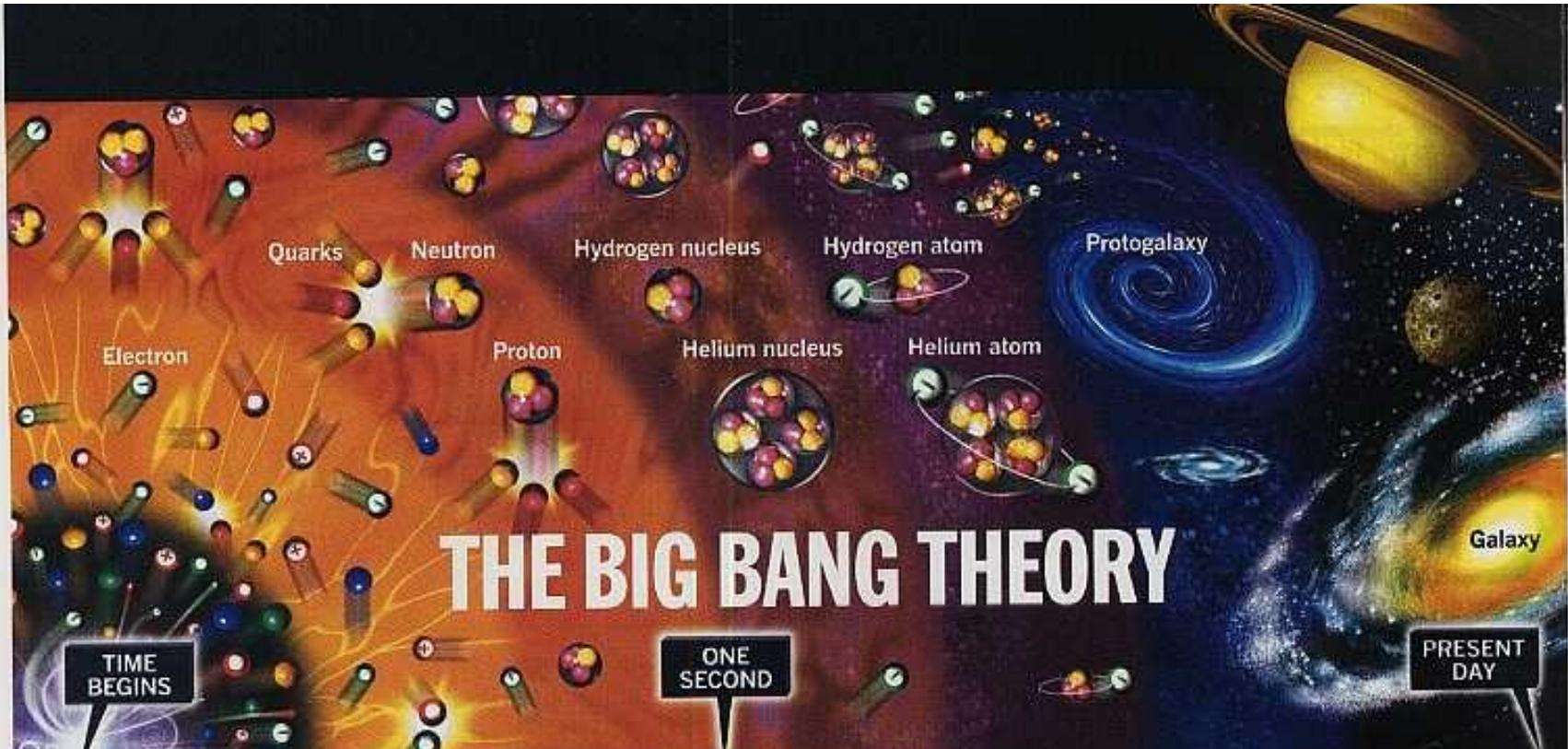
- $E' > E$: “blue shift”, fréquence (donnée par $E = h\nu$) accrue
 - Si sens contraire que photon : “red shift”, fréquence décruée.
Ex: galaxies lointaines
 - On retrouve la formule classique $\nu' = \nu(1 + \beta)$ pour $\beta \ll 1$
- **Effet Doppler Transversal** : Référentiel R' a vitesse β par rapport à R, orthogonalement au photon.
 - La transformation de Lorentz pour un boost donne :

$$E' = \gamma E$$

Fond Cosmologique

“Cosmic Microwave Background” (CMB)

- Théorie du Big-Bang :
 - univers en expansion à partir d'une singularité à $t=0$
 - **À $t \sim 300000$ ans,** recombinaison des électrons et des protons → **l'univers devient transparent** → propagation de la radiation du corps noir
 - **Aujourd'hui : radiation fossile observable. $T=2.7\text{K}$ (micro-ondes)**
 - Protons accélérés par des astres lointains voyagent à travers l'univers
 - CMB et protons peuvent interagir
- Exercice :
 - Interaction frontale entre un photon du CMB et un proton
 - Energie dans le référentiel du centre de masse ?
 - Quelle énergie minimale doit avoir le proton pour que la réaction suivante soit possible ? $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$
 - Ce seuil d'énergie s'appelle le Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) cut-off.
 - Donnée : $k = 8.6e-5 \text{ eV/K}$
 - On négligera m_p



THE BIG BANG THEORY

TIME BEGINS

ONE SECOND

PRESENT DAY

| | | | | | | | |
|-------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|------------------------|--------------------------|------------------------|------------------------|
| Time | 10^{-43} sec. | 10^{-32} sec. | 10^{-6} sec. | 3 min. | 300,000 yrs. | 1 billion yrs. | 15 billion yrs. |
| Temperature | | 10^{27}°C | 10^{13}°C | 10^8°C | $10,000^{\circ}\text{C}$ | -200°C | -270°C |

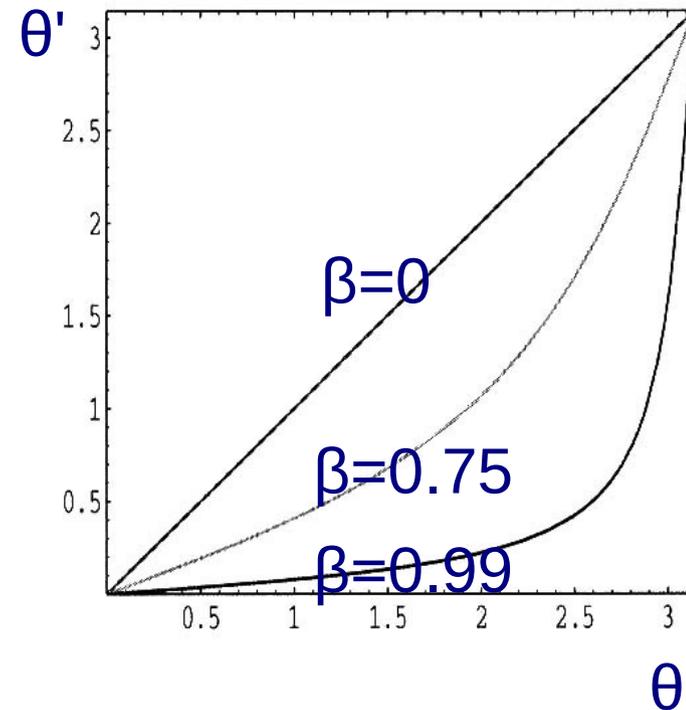
- 1** The cosmos goes through a superfast "inflation," expanding from the size of an atom to that of a grapefruit in a tiny fraction of a second
- 2** Post-inflation, the universe is a seething, hot soup of electrons, quarks and other particles
- 3** A rapidly cooling cosmos permits quarks to clump into protons and neutrons
- 4** Still too hot to form into atoms, charged electrons and protons prevent light from shining; the universe is a superhot fog
- 5** Electrons combine with protons and neutrons to form atoms, mostly hydrogen and helium. Light can finally shine
- 6** Gravity makes hydrogen and helium gas coalesce to form the giant clouds that will become galaxies; smaller clumps of gas collapse to form the first stars
- 7** As galaxies cluster together under gravity, the first stars die and spew heavy elements into space; these will eventually form into new stars and planets

NOTE: The numbers in cosmology are so great and the numbers in subatomic physics are so small that it is often necessary to express them in exponential form. Ten multiplied by itself, or 100, is written as 10^2 . One thousand is written as 10^3 . Similarly, one-tenth is 10^{-1} , and one-hundredth is 10^{-2} .

Aberration de la Lumière

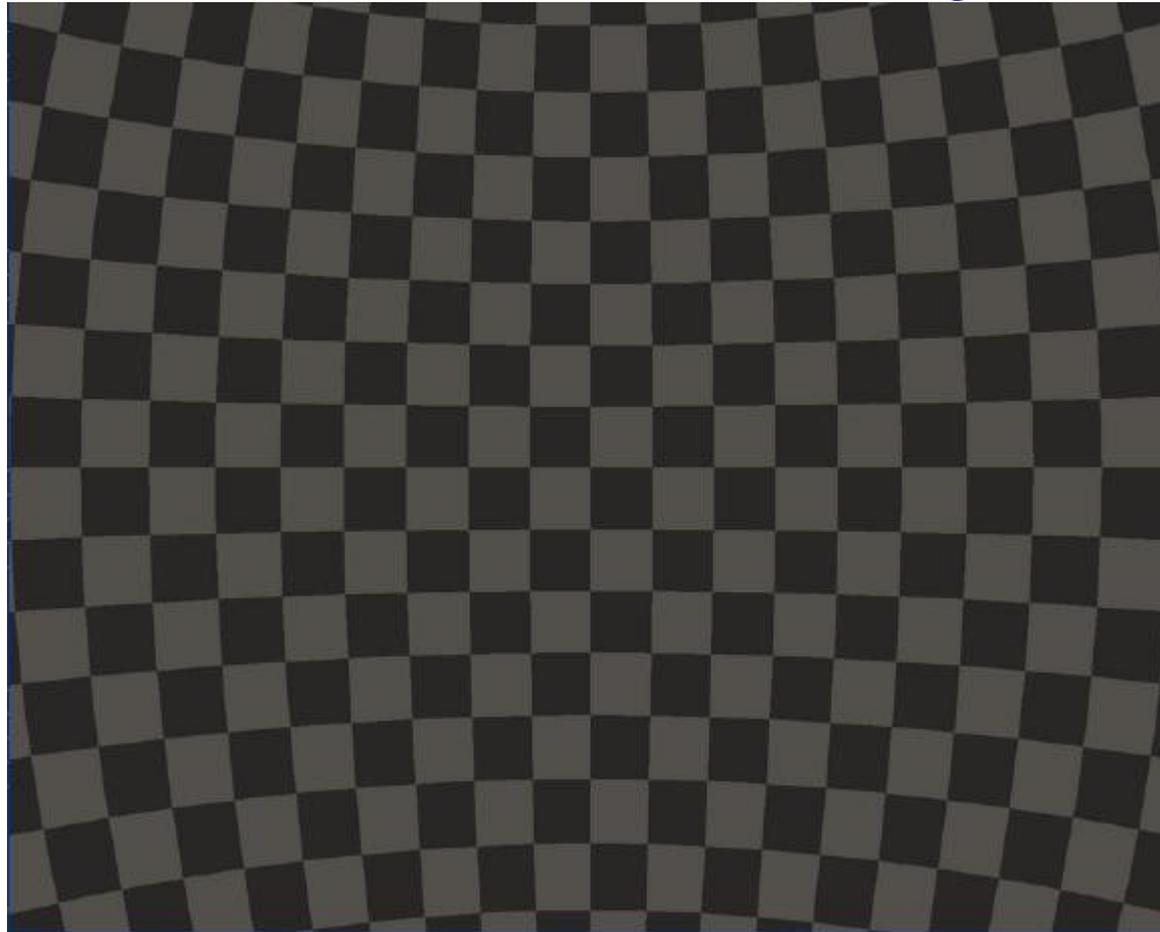
- Un vaisseau spatial se déplace à une vitesse $\beta=v/c$ par rapport aux étoiles de la galaxie.
- Rayons lumineux avec incidence θ / vaisseau
- Montrer que dans le référentiel du vaisseau, les mêmes rayons lumineux ont un angle d'incidence θ' tel que :

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\beta + \cos \theta)}$$



Aberration de la Lumière

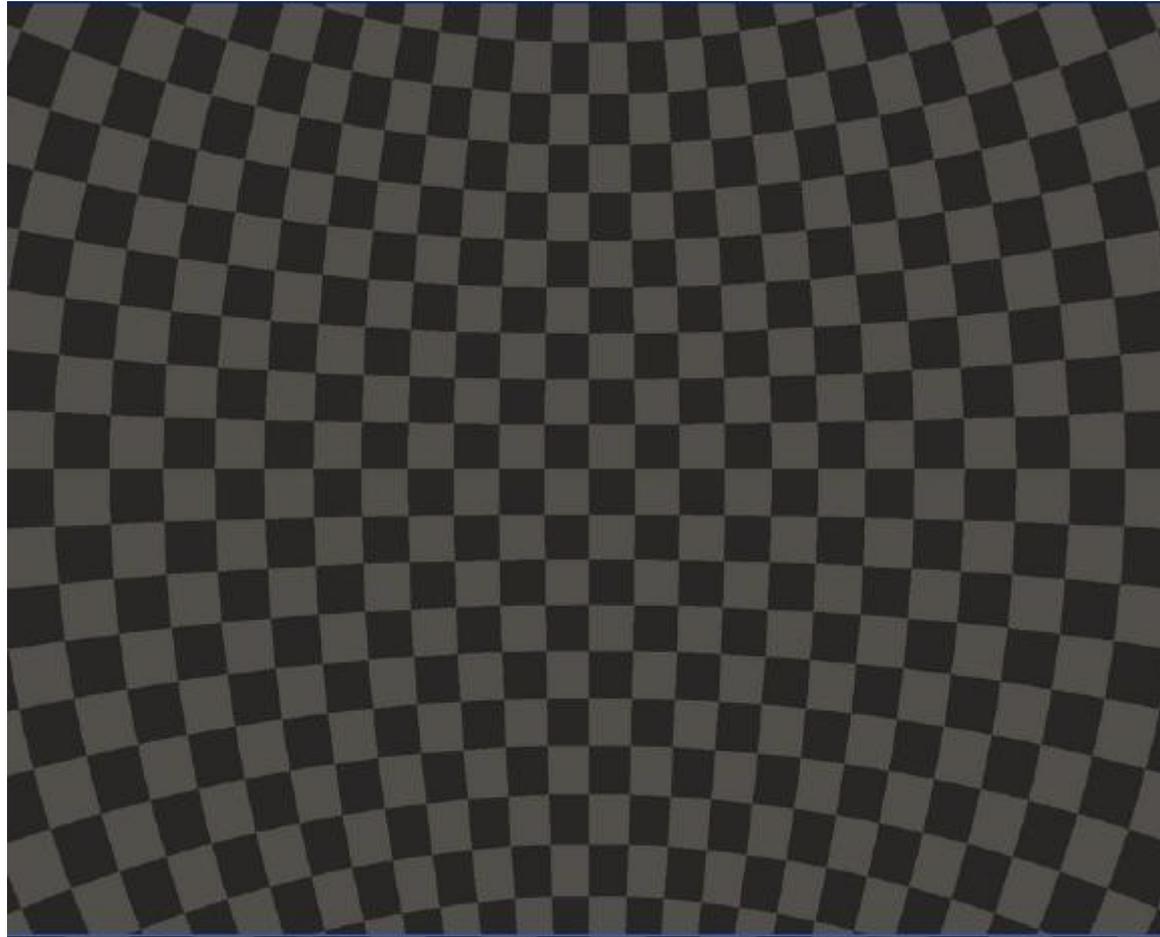
- $V = 0$
- Quadrillage de la sphère céleste de 5 degrés de côté



(A. Riazuelo)

Aberration de la Lumière

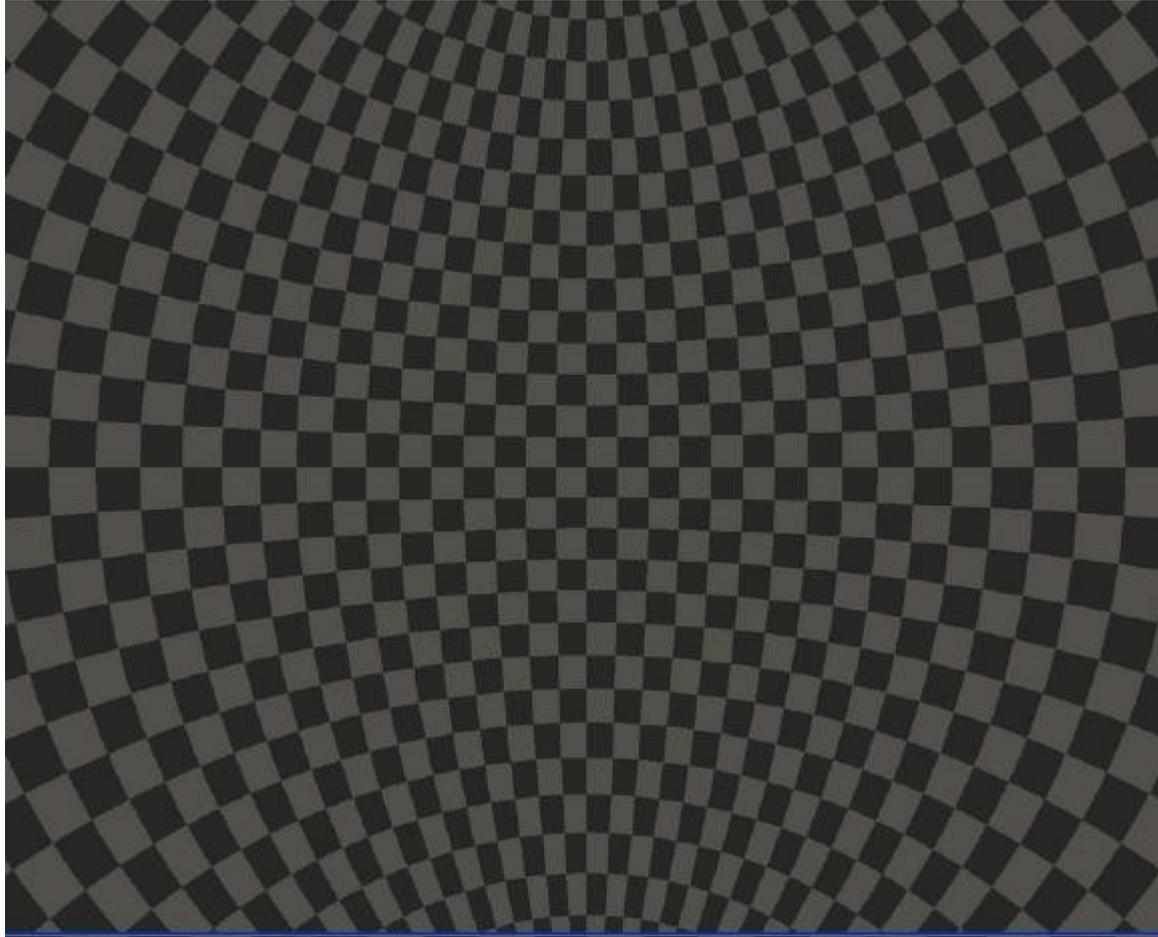
- $V = 0.3c$



(A. Riazuelo)

Aberration de la Lumière

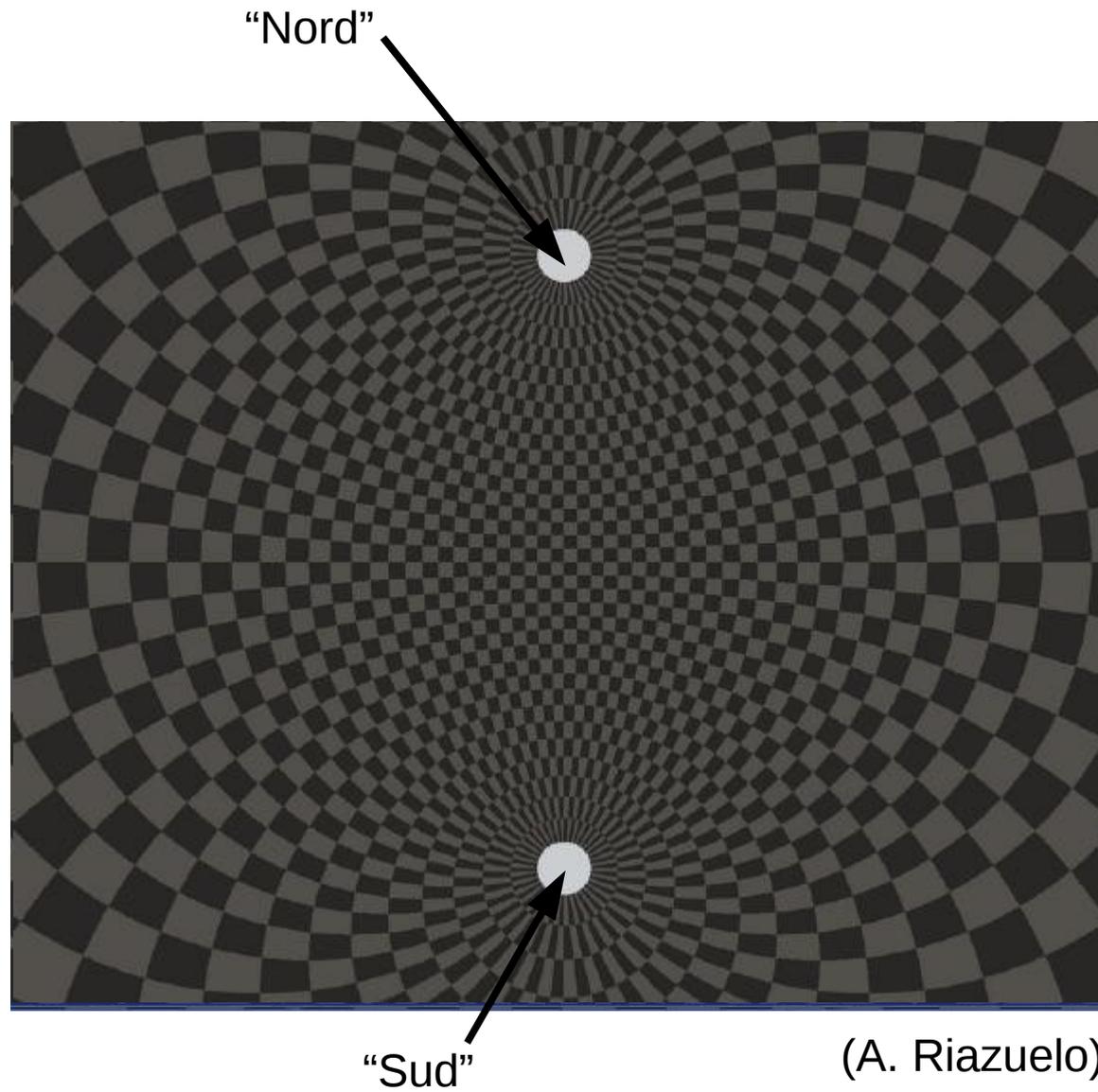
- $V = 0.6c$



(A. Riazuelo)

Aberration de la Lumière

- $V = 0.9c$



Visualisation des Effets Relativistes

- Pour plus de détails et de belles images, voir A. Riazuelo
 - <http://video.google.fr/videoplay?docid=3818939164658758924>
 - <http://www2.iap.fr/users/riazuelo/bh/index.html>
- Effets sur la lumière :
 - Relativité restreinte : aberration, Doppler, intensification
 - Relativité générale : déviation des rayons lumineux, Doppler
- Effets les plus dramatiques aux abords d'un trou noir