MTA Wigner FK Részecske és Magfizikai Intézet
Elméleti Fizikai osztály

Egzakt hidrodinamikai megoldások és nehézionfizikai alkalmazásaik

Doktori értekezés

Írta: Nagy Márton

Témavezető: Csörgő Tamás
az MTA doktora

tudományos tanácsadó

MTA Wigner FK Részecske és Magfizikai Intézet

Budapest, 2012.

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Egzakt hidrodinamikai megoldások és nehézionfizikai alkalmazásaik

Doktori (Ph.D.) értekezés

Írta: Nagy Márton

2012.

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Fizika Doktori Iskola

Iskolavezető: Dr. Csikor Ferenc egyetemi tanár

Részecskefizika és Csillagászat Doktori Program

Programvezető: Dr. Csikor Ferenc egyetemi tanár

Témavezető: Csörgő Tamás, az MTA doktora, tud. tanácsadó

Az értekezés az MTA Wigner FK Részecske és Magfizikai Intézetének

Elméleti Fizikai osztályán készült.

Előszó

A modern fizikai kutatás frontvonala folyamatosan az egyre nagyobb energiájú illetve egyre kisebb méretű struktúrák megismerése felé haladt. Mai világképünk szerint az Univerzum (egy kezdeti exponenciális tágulás, az infláció után) forró és sűrű állapotban jött létre, majd egy sor fázisátalakuláson keresztülmenve tágult és hűlt, melynek során az anyag felvette a ma ismert formáját. Az egyik érdekes fázisátalakulás, amely ma már kísérletileg is vizsgálható, a kvantumszíndinamika (QCD) kvarkanyag-hadronanyag fázisátmenete.

Napjaink nehézionfizikai kísérletei ezek tanulmányozására szolgálnak: a gyorsítókban (Bevalac, AGS, SPS, RHIC, LHC) elektronhéjuktól teljesen megfosztott nehéz atommagokat („nehézionokat") ütköztetnek egymással. Ilyenkor forró és sűrű anyag jön létre, mely rohamosan tágul és hűl, és mire az ütközési pont köré telepített detektorokba ér, már ismét a szokásos (azaz az elemirészecske-reakciók fizikájából jól ismert) részecskék halmaza. Ezek szám– és impulzuseloszlásainak, korrelációinak vizsgálatával lehet az ütközésben keletkezett anyag tulajdonságait felderíteni. Nem magától értődő azonban, hogy ez hogyan tehető meg.

A kísérletek feltárták, hogy a nagyimpulzusú („kemény") részecskespektrumokra hadron-hadron ütközésekben jól működnek a perturbatív QCD alapú modellek (aminek egyik jele, hogy ebben a tartományban a spektrumok hatványfüggvény-alakúak), és a nehézionfizika egyik alapjelenségére, a spektrumokban látott hozamcsökkenésre elfogadható kvalitatív leírást adnak. Ugyanakkor meglepő módon a QCD nemperturbatív tartományába eső („lágy") folyamatok statisztikus, kollektív viselkedést mutatnak. Ezek alapján vált világossá, hogy elegendően nagy energiájú ütközésekben valóban létrejön az ún. kvark-gluon-plazma, amelyet azonban a korábbi várakozásoktól eltérően nem gáz-szerűen, hanem erősen csatolt „tökéletes kvarfolyadékként" viselkedik. (Érdemes megjegyezni, hogy az erős csatolás miatt a kemény folyamatok teljeskörű leírása is igényli a perturbatív QCD-n túlmutató, pl. az AdS/CFT dualitáson alapuló fenomenologikus modellek fejlesztését is.) A folyadékjellegre abból lehet következtetni, hogy a hidrodinamikai leírás, amelyben az anyagot táguló tűzgömbnek tekintve lokális termikus eloszlással modellezzük a kis impulzusú részecskekeltést, igen jól működik. (Egyik jele ennek, hogy ebben a kinematikai tartományban az impulzuseloszlások exponenciális alakúak.)

A hidrodinamikát azért lehet sikeresen alkalmazni egymástól távol eső területeken (pl. az egész Univerzum tágulásától a köznapi méretű dolgokon át a nehézionfizikai folyamatokig), mert az alapegyenletei nem tartalmaznak fizikai skálát (csupán a lokális termikus eloszlásra felírt energia– és impulzusmegmaradást fejezik ki). Ugyanakkor az egyenletek nemlineárisak, megoldásuk leginkább csak numerikusan található meg. Azonban egyrészt matematikai fizikai szempontból mindenképpen érdekes, ha egzakt megoldásokat találunk rájuk, másrészt ezek sokszor önmagukban is használhatóak a kísérleti adatok leírására. A kollektív viselkedés ismerete szükséges ahhoz, hogy össze tudjuk kötni a kísérleti eredményeket az elméleti jóslatokkal. Ezenfelül sok kollektív jellemző (állapotegyenlet, viszkozitás) önmagában is érdekes, hiszen kapcsolatban áll a kialakult anyag mikroszkopikus természetével.

A dolgozatban a kollektív viselkedés vizsgálatának, a hidrodinamikai modellezésnek egy speciális problémakörével foglalkozom: az egzakt (azaz egyszerű képletekkel felírható, analitikus) hidrodinamikai megoldásokon alapuló számításokkal. Ezen belül is a tökéletes folyadékokra felírt egyenletek megoldásaival foglalkozom. (A kísérletek egyik meglepő tanulsága éppen az, hogy a nagyenergiás reakciókban keletkező anyag viszkozitása igen alacsony, közel van a sejtett lehetséges legkisebb értékhez.) Az 1. fejezetben a nehézionfizikában használt fogalmakat, a hidrodinamikai leírás gondolatát és alapegyenleteit, illetve illusztrációként néhány ismert eredményt is felidézek. Az egyenletek megoldási módszereivel és ezek alkalmazásaival a többi fejezet foglalkozik. A 2. fejezetben az alapegyenletek átalakításaival bevezetek egy saját eredményt: új analitikus relativisztikus megoldások egy osztályát. Ezek voltak az első olyan egyszerű explicit, egzakt relativisztikus hidrodinamikai megoldások, amelyek nemeltűmő gyorsulású tágulást írnak le. A 3. fejezetben általánosítom ezeket a megoldásokat, és némelyekről bemutatom, hogy eleget tesznek egy furcsa (a dolgozatban ütközésmentességnek nevezett) feltételnek: ezekben az esetekben a folyadékban mozgó mikroszkopikus részecskék ütközésmentes mozgása is fenntarthatja a lokális termikus egyensúlyt. Ez azért meglepő, mert éppen azt gondoljuk (és általában igaz is), hogy a termalizációt a részecskék sorozatos ütközése tartja fenn. A 4. fejezet pedig egy speciális alkalmazást mutat be: az egyik talált hidrodinamikai megoldás alapján egy parametrizációban kiszámítom a „lágy” tartományban keletkező részecskék rapiditáseloszlását, és a kapott képleteket összehasonlítom a mérési adatokkal. Látni fogjuk, hogy az adatok egy elfogadható leírását kapjuk. Ezek alapján pontosítom a nehézion-reakciókban létrejövő anyag kezdeti energiasűrűségének becslését. Az erre általánosan használt ún. Bjorken-féle módszer nem veszi figyelembe a tágulás gyorsuló voltát. Az itt bemutatott új módszer a RHIC gyorsító adataira alkalmazva a Bjorken-becslés alapján kapottnál mintegy 2-3-szor nagyobb energiasűrűségeket ad. Pl. minden bizonnyal már a kisebb ütközési energiájú RHIC gyorsítónál is megvalósul az LHC gyorsítóra várt energiasűrűség (és ez utóbbinál még nagyobb értékek várhatók).

Tartalomjegyzék

Előszó **iii**

Tartalomjegyzék **v**

1. Bevezetés: hidrodinamika a nehézionfizikában **1**

1.1. Alapfogalmak és jelölések 2

1.2. Kollektív jelenségek a nagyenergiás ütközésekben 3

1.3. Hidrodinamikai modellezés 5

1.4. A hidrodinamikai alapegyenletek 8

1.4.1. Termodinamikai összefüggések és állapotegyenlet 8

1.4.2. Tökéletes folyadékok mozgásegyenletei 11

1.4.3. Kitekintés: súrlódó folyadékok egyenletei és problémái 13

1.5. Ismert egzakt megoldások 15

1.5.1. Nemrelativisztikus eset: önhasonló megoldások 15

1.5.2. Nemrelativisztikus eset: speciális esetek 17

1.5.3. Relativisztikus eset 18

2. Új egzakt relativisztikus megoldások **21**

2.1. Egzakt megoldások keresése 21

2.1.1. Az egyenletek Rindler-koordinátákban 21

2.1.2. Relativisztikus potenciáláramlás vizsgálata 23

2.1.3. Az állapotegyenlet figyelembevétele 26

2.2. Egyszerű gyorsuló új gömbszimmetrikus megoldások 29

2.3. A λ-megoldások 31

2.3.1. A sebességmező és a nyomás kifejezései, alaptulajdonságok 33

2.3.2. A fénykúpon kívüli megoldások 34

2.3.3. A hőmérséklet és a kontinuitási egyenletek 36

2.4. Általános megoldás $\kappa = 1$-re 38

3. Egzakt megoldások és a kinetikus elmélet **40**
3.1. A problémakör felvetése . . . 40
3.2. A kinetikus egyenlet és a hidrodinamikai mennyiségek . . . 41
3.3. Nemrelativisztikus ütközésmentes áramlás . . . 45
3.4. Relativisztikus általánosítás . . . 48
3.4.1. Forgó és haladó táguló megoldások . . . 50
3.4.2. Az $1+1$ dimenziós eset . . . 54
3.5. Diszkusszió . . . 55

4. Fenomenológiai alkalmazások **57**
4.1. Motiváció . . . 58
4.2. A rapiditáseloszlás kiszámítása . . . 60
4.2.1. A λ-megoldás alkalmazása . . . 60
4.2.2. A rapiditáseloszlás közelítő analitikus alakja . . . 62
4.3. A nehézion-reakciók kezdeti energiasűrűsége . . . 66
4.3.1. A Bjorken-becslés . . . 66
4.3.2. A Bjorken-becslés pontosítása a gyorsulás figyelembevételével . . . 67
4.3.3. A nehézion-reakciók kollektív mozgásának élettartama . . . 71

5. Összefoglalás **74**
5.1. Tézispontok . . . 74
5.2. Kitekintés . . . 75
Köszönetnyilvánítás . . . 76

A. Kiegészítések az egzakt relativisztikus megoldásokhoz **78**
A.1. A λ-megoldások . . . 78
A.2. A λ-megoldások fénykúpon kívüli analógjai . . . 81
A.3. A gömbszimmetrikus Khalatnikov-egyenlet . . . 83
A.3.1. A (2.30) megoldás levezetése . . . 83
A.3.2. A (2.26) egyenlet (2.27) szerinti általánosítása . . . 85
A.3.3. A Landau-Khalatnikov-megoldás . . . 86

B. Kiegészítések az ütközésmentes áramlások vizsgálatához **88**
B.1. A nemrelativisztikus eset . . . 88
B.2. A relativisztikus ütközésmentes áramlás . . . 91

Irodalomjegyzék **94**

1. fejezet

Bevezetés: hidrodinamika a nehézionfizikában

Dolgozatom témája a tökéletes folyadékok relativisztikus hidrodinamikájának egzakt megoldási módszerei, új partikuláris egzakt megoldások, és ezek alkalmazásai. Ezen kutatási irány fő motiváló ereje a nagyenergiás nehézionfizikai fenomenológia. A nehézionfizika az erős kölcsönhatás fázisszerkezetének kísérleti kutatásával és az ezt kiszolgáló elméleti modellekkel foglalkozik.

Az egyik idevágó alapkérdés sokáig az volt, hogy vajon nagy hőmérsékleten és nyomáson tényleg létrejön-e a „kvark-gluon-plazma". Ezt a fogalmat a hadronokból kiszabadult kvarkok és gluonokat tartalmazó halmazállapotra Shuryak vezette be [1]. Ennek előzménye volt, hogy Cabibbo és Parisi új halmazállapot létezését jósolták [2], válaszul Hagedorn látszólagos paradoxonára [3], amely a hadronok megfigyelt tömeg-spektrumából egy felső határhőmérsékletre próbált következtetni. Azt, hogy a kvark-gluon-plazma valóban létezik, és valóban létrejön elegendően nagy energiájú nehézion-ütközésekben, csak nemrég sikerült kétséget kizáróan bizonyítani, jórészt az amerikai RHIC nehézion-ütköztető eredményei alapján [4, 5, 6, 7]. Kiderült továbbá, hogy ezekben az ütközésekben a lágy (azaz nem perturbatív) kinematikai tartományban mért adatok arra utalnak, hogy az így létrejött anyag igen hamar termalizálódik, és további tágulása során szinte tökéletes folyadékként viselkedik, szemben számos korábbi jóslattal, melyek gyengén csatolt gáz megjelenését várták. A gázszerű halmazállapot elképzelését az sugallta, hogy a QCD ismert tulajdonsága az aszimptotikus szabadság [8, 9] (azaz hogy nagy impulzusátadásokra az α_s erős csatolási állandó nullához tart), kézenfekvő volt tehát egy magas hőmérsékletű, mintegy „szabadon" mozgó kvarkokból és gluonokból álló plazmát elképzelni[1].

A folyadék-jellegre éppen az alapján lehetett következtetni, hogy a keletkezett anyagot leírni

[1] Persze az, hogy a kísérletekben előállított kvark-gluon-plazma nem ilyen, az nem cáfolja az aszimptotikus szabadságot, mindössze azt mutatja, hogy a kísérletileg előállított kvark-gluon-plazma szabadsági fokai nem az „aszimptotikus" tartományban hatnak kölcsön.

próbáló modellek közül a hidrodinamikai modellek sikeresek voltak. A hidrodinamikai leírás nem veszti el jelentőségét azzal, hogy lezárult a kvark-gluon-plazma felfedezésének időszaka, és kezdetét vette ezen új halmazállapot precíziós tanulmányozása. Sőt, bizonyos mennyiségek (hangsebesség, állapotegyenlet, viszkozitás, illetve az állapotjelzők, mint hőmérséklet, nyomás, energiasűrűség) éppen hidrodinamikai képben határozhatók meg kísérletileg.

Ebben a bevezető fejezetben a nehézion-ütközések és a hidrodinamikai modellezés alapjait tekintem át. Hogy a későbbiekben kényelmesen tudjuk használni őket, a legfontosabb alapfogalmakat és jelöléseket itt az elején összefoglalom. Utána bevezetem a hidrodinamikai alapegyenleteket, és néhány ismert eredményt is felidézek, amelyeken saját munkám is alapult.

1.1. Alapfogalmak és jelölések

A nagyenergiás ütközésekben keletkező részecskék p impulzusát p_z longitudinális (nyalábirányú) és p_T transzverz (nyalábirányra merőleges) komponensekből állítjuk össze: $p^2 = p_T^2 + p_z^2$. A kirepülő részecske E energiája és m_0 tömege $E^2 = m_0^2 + p^2 = m_T^2 + p_z^2$ módon függ össze, ahol bevezettük az $m_T = \sqrt{m_0^2 + p_T^2}$ transzverz tömeget[2]. A nyalábirányhoz viszonyított kirepülési szög θ, ebből származtatható az η-val jelölt pszeudorapiditás: $\eta = \operatorname{Ar\,th} \cos\theta = \frac{1}{2} \ln \frac{p+p_z}{p-p_z}$. A szokásosan y-nal jelölt hasonló mennyiséget rapiditásnak nevezzük, és $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p_z}{E-p_z}$ módon definiáljuk[3]. A transzverz síkban mért azimutális kirepülési szöget φ-vel jelöljük (általában a reakció valamilyen módon definiált azimutális reakciósíkjához viszonyítva). Könnyű ellenőrizni, hogy az invariáns impulzuseloszlást (spektrumot) a következő ekvivalens módokon írhatjuk fel:

$$N_1(\mathbf{p}) = E \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}} = \frac{E}{p_T} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_T \mathrm{d}p_z \mathrm{d}\varphi} = \frac{E}{p} \frac{1}{p_T} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_T \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{p_T} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_T \mathrm{d}y \mathrm{d}\varphi}. \tag{1.1}$$

Spektrum-méréseknél igen gyakran a φ-re integrált alakokat adják meg. A φ-függést a v_n anizotrópia-paraméterek (Fourier-komponensek) segítségével lehet megadni:

$$v_n = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, E \frac{\mathrm{d}n}{p_T \mathrm{d}p_T \mathrm{d}p_z \mathrm{d}\varphi} \cos(n\varphi). \tag{1.2}$$

Igen fontos a v_2 mennyiség, amelyet *elliptikus folyásnak* is neveznek: ez viszonylag egyszerűen mérhető, és látni fogjuk, hogy árulkodik a létrejövő anyag folyadékszerű természetéről.

[2] Használatos a transzverz energia fogalma is: néha az E energia nyalábirányra merőleges „vetületét”, néha $m_T - m_0$-t értik rajta, néha m_T szinonimájaként használják. Ebben a dolgozatban csak az m_T-t használjuk.

[3] Az y nem egyezik meg a relativisztikus mechanikában szokásos sebességparaméterrel; az utóbbit szintén használni fogjuk, de nem lesz félreérthető sehol. η és y az $m_0 = 0$ (vagyis az extrém relativisztikus) határesetben egyenlőkké válnak, mindazonáltal η-t sokkal egyszerűbb megmérni, innen a *pszeudo–* elnevezés. Viszont az y mennyiség az, ami longitudinális Lorentz-boostokra additív, tehát sok esetben ez a „természetesebb” változó.

A nagyenergiás fizikai megfigyelhető mennyiségek közül fontos szerepet játszanak még az impulzustérbeli korrelációs függvények: definíciójuk két részecskére

$$C\left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\right) \equiv \frac{N_2\left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\right)}{N_1\left(\mathbf{p}_1\right) N_1\left(\mathbf{p}_2\right)}, \tag{1.3}$$

ahol $N_2\left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\right)$ a kétrészecske-eloszlás. A lágy kinematikai tartományban $C\left(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\right)$ egytől való eltérésének a részecskék kvantummechanikai megkülönböztethetetlensége az oka: bozonokra (pl. a leggyakoribb keletkező részecskékre, pionokra) ezért Bose-Einstein-korreláció a neve. A korrelációs függvény jól mérhető, és a forrás méretének letapogatására használható. (Eredetileg az ilyen típusú korrelációkat rádiócsillagászatban fedezték föl és használták [10], ezért (a szerzők, R. Hanbury Brown és R. Q. Twiss neveiből) HBT-korrelációként is emlegetik. Használatos a „GGLP-effektus" elnevezés is, azok neveiből, akik ezt pionkeltésben először értelmezték [11].)

A hidrodinamikai egyenletek és megoldások során a következő jelöléseket használom. Általában a c fénysebességet 1-nek veszem. Az alapsokaság sík Minkowski-téridő, a metrikus tenzor $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(1, -1, -1, -1\right)$. Néhol vizsgálok majd egy– és kétdimenziós áramlásokat is, a tér dimenziószámát ezért egységesen D-vel jelölöm. Görög betűkkel jelölöm a $0, 1, \ldots, D$ téridő-indexeket, latin betűkkel az $1, \ldots, D$ térindexeket. A folyadék dinamikai jellemzői az x^μ téridőkoordináta (a t idő és az $\mathbf{r}$ helyvektor) függvényei, de ezt a függést általában nem írom ki. A folyadék (hármas)sebessége $\mathbf{v}$, négyessebessége $u^\mu \equiv \gamma\left(1, \mathbf{v}\right)$, ahol $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. A normálás tehát $u^\mu u_\mu = 1$. A (relativisztikus esetben a nyugalmi energiát is tartalmazó) energiasűrűség ε, a nyomás p, a hőmérséklet T, az entrópiasűrűség s. Ha van (esetleg több típusú) megmaradó részecskeszám (töltés), akkor a megfelelő sűrűséget n-nel, a kémiai potenciált μ-vel jelölöm (esetleg indexekkel megkülönböztetve). A termodinamikai mennyiségek Lorentz-skalárok, a sűrűségek lokális nyugalmi rendszerbeli egységnyi térfogatra vonatkoznak. A gyakran előkerülő együttmozgó derivált jelölése $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\nabla\right)$. A nemrelativisztikus jelölések értelemszerűen hasonlók; fontos különbség, hogy itt az ε energiasűrűségbe nem értjük bele a nyugalmi energiát. Ebben az esetben be kell vezetni az anyag sűrűségét is, azaz egy megmaradó n részecskeszámot, továbbá a részecskék m_0 tömegét is.

1.2. Kollektív jelenségek a nagyenergiás ütközésekben

Relativisztikus energiájú hadronok ütközését először „elemi", azaz pl. nukleon-nukleon folyamatokban vizsgálták. Az 1950-es években az első ilyen kísérleti eredmények a kozmikus sugárzásban érkező hadronok álló céltárggyal való (rugalmatlan) ütközéseinek megfigyeléséből származtak. Témánk szempontjából az egyik legalapvetőbb kísérleti megfigyelés az volt, hogy

az ilyen ütközésekben keletkező másodlagos részecskék átlagos transzverz impulzusa egy jól behatárolt tartományban, $p_T \sim 0.5$ GeV/c környékén van, teljesen függetlenül a beeső részecske (akár több nagyságrenden át is változó) energiájától [12]. Nagyenergiás hadronok laboratóriumi ütköztetésére később, az 1970-es évektől került sor. Ezekben (pl. a brookhaveni AGS gyorsítónál), és már a kozmikus sugárzásban is megfigyelték, hogy az alacsonyabb impulzusú részecskék mintegy „termikus", azaz egy adott, $T \simeq 160 - 170$ MeV hőmérsékletnek megfelelő exponenciális spektrummal keletkeznek [12, 13]. A mai nehézionfizikai kutatások két fő helyszíne a Brookhaven-ben épült, 2000 óta működő RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), illetve a CERN-ben üzemelő LHC (Large Hadron Collider). Az ütközési energia és luminozitás növekedésével mára elérhetővé vált, hogy akár elemi hadronok, akár nehézionok ütközésében „nagy", azaz a perturbatív QCD érvényességi tartományába eső transzverz impulzusú részecskék keletkezése is vizsgálható legyen. Ez a p_T-tartomány teljesen eltér az előbb tárgyaltaktól: nagyon ritka folyamatokról van szó, és a p_T-spektrum közelítőleg hatványfüggvény alakú. Manapság tehát ez alapján beszélünk *lágy* és *kemény* folyamatokról, kis és nagy impulzusokról.

A nagy p_T-jű részecskék nehézion-ütközésekben megfigyelt, a proton-proton ütközésekhez képesti részecskehozam-csökkenése („elnyomása", lásd pl. [14]), illetve, hogy ez nem volt megfigyelhető deutérium-arany ütközésekben [15] azt mutatta, hogy a RHIC gyorsítónál (és az LHC-nál is) új, igen sűrű anyag jön létre. (Perturbatív QCD-n alapuló, a gluonikus fékezési sugárzással számoló modellek már régen jóslatot adtak ilyen elnyomásra.) Annak, hogy ez az anyag nem gáz-szerű, hanem kvarkokból és gluonokból álló, erősen csatolt folyadék, az egyik legbevilágítóbb bizonyítéka az elliptikus folyás (v_2) vizsgálata. A v_2 értéke nemcentrális nehézion-ütközésekben, amikor kezdetben anizotrop tűzgömb alakul ki, jelentősnek adódott, ami annak a jele, hogy a kezdeti térbeli anizotrópia a végállapotban impulzus-anizotrópiaként jelentkezik. (Gyengén csatolt gáz tágulása esetén a modellek nem ezt mutatják.) A v_2-ről megállapítható volt, hogy nagysága a keletkező hadronok kvark-tartalmával skálázik, még a charm– és bottom-kvarkokra is. Továbbá a hidrodinamikai modelleknek az adatokkal való részletes összevetése (pl. a további azimutális felharmonikusok, mint a v_4 skálázása) azt mutatja, hogy a keletkező folyadék η viszkozitása kicsi, az entrópiasűrűségre vonatkoztatott η/s arány tízszer kisebb, mint szuperfolyékony ^{4}He-ra, és közel van $1/4\pi$-hez. (Erre széles körben úgy tekintenek, mint a viszkozitás egy elméleti alsó határára [16], mely az ún. AdS/CFT-korrespondencia egy fenomenologikus következményeként adódik. A v_2 RHIC energiákon való mérésének egy összefoglalója olvasható pl. [17]-ben, az adatok egy speciális hidrodinamikai modellel, az ún. Buda-Lund-modellel való összevetése pedig [18]-ban.) Egy további megerősítést jelent arra nézve, hogy valóban hadronokból kiszabadult kvarkok és gluonok anyagáról van szó, hogy az ütközésekben keletkező direkt (azaz nem hadronok bomlásából származó) fotonok spektruma

alapján meghatározott kezdeti hőmérséklet mindenképp 300 MeV fölött van [19], míg a fázisátalakulás hőmérsékletét a rács-QCD-n alapuló számolások körülbelül 170 MeV-re teszik [20].

Ezen eredményeket a következő állításokban foglalhatjuk össze (melyek a RHIC-nél folyó kutatások „mérföldköveinek" is tekinthetők): a RHIC-nél $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú ütközéseiben megfigyelt új jelenség (a nagy p_T-s részecskék elnyomása) új anyag megjelenésére utal, amely folyadék, mégpedig kvarkok folyadéka. Súrlódási együtthatója igen kicsi, és kezdeti hőmérséklete jóval az elméleti kvarkanyag-hadronanyag fázisátalakulási hőmérséklet fölött van. (Ezek miatt a keletkezett új halmazállapotot „kvark-gluon-plazma" helyett egyre inkább a kísérletileg sugallt „tökéletes kvarkfolyadék" elnevezéssel illetik.) Az LHC eddigi nehézionfizikai mérései hoztak ugyan meglepetéseket, de összességében nagyobb ütközési energián is teljesen hasonló képet sugallnak. (Ezen mérések összefoglalójáról jelenleg pl. [21]-ben olvashatunk.)

1.3. Hidrodinamikai modellezés

Fermi volt az első, aki az 1950-es években statisztikus fizikai modellel próbálta leírni a nagyenergiás ütközésekben keletkező részecskék multiplicitás-eloszlását [22]. Gondolatának alapja az volt, hogy erős kölcsönhatás esetén az energia gyorsan szétoszlik a sok szabadsági fok között, így statisztikus leírás lesz alkalmazható. Landau állapította meg, hogy a nagyenergiás reakciókban keletkező részecskék spektrumainak (pl. p_T-spektrum, rapiditáseloszlás) leírására már szükség van a (relativisztikus) hidrodinamikai tágulás figyelembevételére [23], és hogy a hidrodinamika alkalmazhatóságának általános feltétele, azaz hogy az átlagos szabad úthossz kicsi legyen az inhomogenitások méretéhez képest, teljesülni fog elég nagy energián. Ő írta fel a relativisztikus hidrodinamikai alapegyenleteket, és munkatársaival közösen adott is rájuk egy bonyolult egzakt megoldást [24, 25]. Azóta a hidrodinamikai modelleket minden irányban fejlesztették, és alkalmazták különböző nagyenergiás folyamatokra. Ebben a szakaszban az ilyen modellek néhány alapfogalmát idézem fel.

A nagyenergiás ütközésben létrejött anyag igen hamar, kb. 0,6–1 fm/c idő alatt termalizálódik; ez a direkt fotonok spektrumának méréséből bizonyítható[4] [19]. Ezután az anyag tágul és hűl, melynek során — ha létrejött a kvark-gluon-plazma — először a kvarkbezárás átalakulási hőmérsékletén lezajlik a hadronizáció, majd a keletkezett hadronközeg tovább tágul. Előbbutóbb megszűnik a „közeg"-jellege (vagyis abbamaradnak a hadronok erős kölcsönhatás által leírt szórási, átalakulási folyamatai), és innentől a keletkezett hadronok (a közegbeli viselkedéshez képest) gyakorlatilag szabad mozgással haladnak a mérőberendezés felé. A hadronikus

[4] Ezt az állítást a direkt fotonok mérése előtt azzal indokolták, hogy a végállapotbeli hadronoknak az ezt alapul vevő hidrodinamikai modellekkel való leírása a sikeres. A „korai termalizáció" így általánosan elfogadottá vált, noha valójában a hadronikus végállapot nem eléggé érzékeny a termalizáció létrejöttének idejére.

közeg „felbomlását” *kifagyásnak*, az ennek megfelelő hőmérsékletet kifagyási hőmérsékletnek, T_f-nek nevezzük (az angol freeze-out szóból). A hidrodinamikai modellekben ez a kép, vagyis, hogy a végállapotban is mérhető részecskék lokálisan pillanatszerűen, azaz háromdimenziós hiperfelületre (vagy „vékony”, kis időbeli szélességű négyestérfogat-sávra) koncentrálva jelennek meg, helyettesíti azt a valójában rendkívül bonyolult folyamatot, ahogyan a hadronok lecsatolódnak egymásról[5]. Landau becslése [23] T_f-et a piontömeg ($\simeq$ 140 MeV) környékére teszi; ennek indoka, hogy a pion a legkönnyebb erősen kölcsönható részecske, így ennél sokkal kisebb hőmérsékletű közegben már nem történik erős kölcsönhatáson alapuló rugalmatlan szórás: így pionokból álló gázban a szabad úthossz exponenciálisan elkezd nőni a piontömeg környékén lévő hőmérsékletek alatt (e fölött pedig éppen ellenkezőleg: a szabad úthossz kicsinysége miatt alkalmazható a hidrodinamika.) A T_f pontosabb értékét persze mérésekből kell meghatározni.

A hidrodinamikai modellekben a megfigyelhető mennyiségek ezután a végállapoti termikus eloszlásfüggvényből lehet kiszámolni, amit ebben az összefüggésben *forrásfüggvénynek* szoktak hívni, és $S(x^\mu, p^\mu)$-vel jelölni. Ennek térintegrálja az invariáns impulzuseloszlás, és kimutatható, hogy a $C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ Bose-Einstein-korrelációs függvény első közelítésben $S(x^\mu, p^\mu)$ Fourier-transzformáltjával van kapcsolatban, így információt hordoz a forrás téridőbeli alakjáról[6]:

$$N_1(\mathbf{p}) = \int \mathrm{d}^4x\, S(x^\mu, p^\mu), \quad C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \simeq 1 + \frac{\left|\tilde{S}(q,K)\right|^2}{\left|\tilde{S}(0,K)\right|^2}, \quad \tilde{S}(q,K) \equiv \int \mathrm{d}^4x S(x,K)\, e^{iqx},$$

ahol a $q \equiv p_1 - p_2$, $K \equiv \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ jelölést használtuk.

$N_1(\mathbf{p})$-t és $C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$-t, ill. a belőlük származtatott mennyiségeket tudjuk aztán összehasonlítani a kísérleti eredményekkel. (A 4. fejezetben ezt a folyamatot egy példán keresztül részletesen bemutatom.) Felmerül e kérdés: milyen új információhoz juthatunk egy sikeres hidrodinamikai modellből? A statisztikus leírásmód célszerű, mert sok mikroszkopikus jelenséget kiátlagol; egy részecskefizikai problémakörben nem pont ilyenekre lennénk kíváncsiak?

A válasz egyrészt az, hogy sok kollektív tulajdonság (az anyag állapotegyenlete, vagy akár az a kérdés, hogy létrejön-e a kvark-gluon-plazma) önmagában is érdekes. Másrészt minden szempontból nagyon hasznos volna, ha lenne olyan hidrodinamikai modell, (azaz az adatokhoz illeszthető folyási profil és előírás a kifagyási felületre) ami bármilyen mérési adatok esetén

[5] Nem lezárt kérdés az sem, hogy mennyi idő telik el a kifagyásig a hadronizációtól kezdve, vagyis mennyi a hadronikus közeg élettartama. Elképzelhető pl. a „túlhűlés” is: ekkor a kvark-gluon-plazmából rögtön a végállapoti, erős kölcsönhatásban már nem álló részecskék jelennek meg.

[6] $C(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ e kifejezése azonos bozonokra (pl. pionokra) vonatkozik. Annyiban közelítő, hogy felteszi, hogy a két részecske impulzuskülönbsége kicsi az átlagos impulzusukhoz képest, továbbá elhanyagolja a többrészecske-korrelációkat és a végállapoti Coulomb-kölcsönhatást. Ez utóbbit figyelembe véve a forrás alakja bonyolultabb integráltranszformációval rekonstruálható. Részletesebben lásd pl. a [26] összefoglalót vagy a [27] szemlét.

egyértelműen leírja a dinamikát. Napjainkban viszont ettől igen messze vagyunk. A jelenlegi hidrodinamikai modellezésben egyelőre az is nagy eredmény, ha legalább valamilyen elfogadható leírást sikerül adni a kisimpulzusú tartományban megfigyelt kísérleti adatokra, a tágulásra és a kezdeti feltételre vonatkozó értelmes feltételezésekkel.

A hidrodinamikai modellek körében beszélünk a végállapotot leírni próbáló *parametrizációkról* és az időfejlődést végigkövető *megoldásokról*. Az előbbiek tulajdonképpen csak valamilyen ésszerű feltevést próbálnak tenni $S(x,p)$-re, amit az adatokhoz illesztve lehet ellenőrizni. A számtalan ilyen közül két fontosabbat szeretnék röviden megemlíteni: az egyik az ún. blast wave modell [28], a másik a Buda-Lund-modell [29, 30]. Mindkét modell egy ttáguló tűzgömböt ír le. A blast wave modell azt teszi fel, hogy a tágulás során lökéshullámok haladnak kifelé adott állandó sugárirányú sebességgel, és a kifagyás is egyszerre történik egy-egy lökéshullámban. Ezen az elképzelésen elindulva mára egy egész modell-osztály fejlődött ki.

A Buda-Lund-modell pedig egy olyan parametrizáció volt eredetileg, ami Hubble-szerű, azaz önhasonló tágulást tett fel. További alappillérei a következők: a forrás felosztása egy „mag" (core) és egy „glória" (halo) részre, amely utóbbi a (reakció élettartamához képest) lassan bomló rezonanciák bomlását írja le, és a forrásra az önhasonló tágulás mellett ellipszoid-szerű szimmetriát, a forrás sűrűségére Gauss-alaknál akár általánosabb alakot is tesz fel. A modell eredetileg tengelyszimmetrikus megfogalmazását később általánosították háromtengelyű ellipszoidra [31]. A modell olyan adatok leírására is használható, amelyek más modellek számára problematikusak voltak. (Ilyen pl. a HBT-korrelációk sugárparamétereinek p_T-függése [32], amit *RHIC HBT-rejtély*ként is emlegettek.) Úgy tűnik tehát, hogy az önhasonló tágulás feltevése természetesen vezet az adatokban megfigyelt skálázási tulajdonságok magyarázatához. Kiderült továbbá, hogy a Buda-Lund-parametrizációból határesetként számos — nemrelativisztikus és relativisztikus — egzakt hidrodinamikai megoldás megkapható: a modell mintegy ezek között interpolál. Ezen megoldások közül néhányat felidézek az 1.5. szakaszban.

Ez a kérdéskör már átvezet a hidrodinamikai egyenletek megoldásaihoz: minden új eredmény ezen a téren hasznos lehet a modellek fejlesztéséhez. Többféleképpen is osztályozhatjuk a nehézionfizikai hidrodinamikai megoldásokat. Először is az egyenletek megoldása történhet *numerikusan* (számítógéppel), illetve *analitikusan* (zárt formulákkal). Az analitikus megoldások között beszélünk valódi explicit megoldásokról és ún. parametrikus megoldásokról, amikor a hidrodinamikai egyenletek megoldását egyszerűbb közönséges differenciálegyenletek (analitikusan nem feltétlenül ismert) megoldásaival adhatjuk meg. (Ilyenkor ezek a közönséges differenciálegyenletek, és velük a hidrodinamikai egyenletek is, lényegében megoldottnak tekinthetők, az egyszerű numerikus tárgyalhatóságra gondolva.) Beszélhetünk továbbá *megoldásosztályokról* is, ha pl. a megoldás egy tetszőlegesen választható függvényt tartalmaz. (Egy szép ismert

nemrelativisztikus parametrikus megoldásosztályt idézek fel az 1.5. szakaszban.)

A numerikus módszerek nyilvánvaló előnye, hogy realisztikusabb állapotegyenletet használhatunk, illetve kevésbé kötött a kezdőfeltétel megválasztása, míg analitikus megoldáson alapuló modellekhez a tágulási képhez illeszkedő megoldásokat vagy ilyenek osztályát kell találnunk. Ugyanakkor ezek egyszerű formában adhatják meg a kezdő– és a végállapot kapcsolatát: a dinamika megértése szempontjából minden fizikai problémában hasznos, ha egzakt megoldások állnak rendelkezésre. A további fejezetek ilyen megoldások kereséséről és nehézionfizikai alkalmazásairól szólnak.

1.4. A hidrodinamikai alapegyenletek

A következőkben felidézzük a relativisztikus és nemrelativisztikus hidrodinamika alapegyenleteit. Ezek jól ismertek, mégis fontosnak tartom részletesen tárgyalni őket. A fizika (és egyéb tudományok) sok különböző ágában használnak hidrodinamikai modelleket (ennek végső soron a hidrodinamikai modellezés alapelvének az előszóban említett univerzalitása az oka), és nem mindig egymással kompatibilis módon használják a fogalmakat, egyenleteket. Még a nehézionfizika relatíve „szűk” területén belül is többféle elnevezés, fogalmi konvenció létezik.

1.4.1. Termodinamikai összefüggések és állapotegyenlet

A hidrodinamikai leíráshoz a termodinamikai állapotjelzők közül feltétlen szükség van ε-ra és p-re; az egyenletek a $\mathbf{v}$ sebességmező időfejlődését ezekkel kapcsolják össze. Ahhoz, hogy zárt egyenletrendszert kapjunk, szükség van az áramló anyag állapotegyenletének megadására is. Ezt valamelyik termodinamikai potenciálfüggvénnyel adhatjuk meg. Ha nem foglalkozunk semmilyen megmaradó részecskeszámmal, akkor megfelel az $\varepsilon(s)$ függvény. Ha van (akár többféle) megmaradó n részecskeszám (és megfelelő μ kémiai potenciál[7], akkor egy megfelelő potenciálfüggvény az $\varepsilon(s,n)$ függvény, amiből a további mennyiségek így származtathatók:

$$T(s,n) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s}, \quad \mu(s,n) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d}\varepsilon = T\mathrm{d}s + \mu \mathrm{d}n. \tag{1.4}$$

Ez az ismert alapvető $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V + \mu\mathrm{d}N$ termodinamikai összefüggés egységnyi térfogatra átírva. Mivel homogén anyagot vizsgálunk, érvényesek a Gibbs–Duhem-reláció folyományai:

$$\varepsilon + p = Ts + \mu n, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}p = s\mathrm{d}T + n\mathrm{d}\mu. \tag{1.5}$$

[7] Ezekben az alapképletekben az egyszerűség kedvéért egyféle n és μ szerepel, értelemszerű $\mu\,\mathrm{d}n \to \sum_i \mu_i \mathrm{d}n_i$, $\mu n \to \sum_i \mu_i n_i$, stb. helyettesítésekkel többféle megmaradó n_i töltés is bevezethető.

Napjaink nehézionfizikai kísérleteiben az ütközési energia lényegesen nagyobb, mint az ütköző magok tömege. Emiatt a relativisztikus hidrodinamikában szokás azzal a közelítéssel élni, hogy a megmaradó töltés (a barionszám) sűrűségét nem vesszük figyelembe, és a megfelelő μ-t is nullának vesszük. Ekkor a termodinamikai összefüggések (1.4) helyett ilyen alakúak:

$$\varepsilon + p = Ts, \quad T(s) = \frac{\partial \varepsilon(s)}{\partial s}, \quad s(T) = \frac{\partial p(T)}{\partial T}. \tag{1.6}$$

Az állapotegyenletet tehát megadhatjuk az $\varepsilon(s,n)$ ill. az $\varepsilon(s)$ potenciállal (vagy (1.5) és (1.6) alapján a $p(T,\mu)$, ill. a $p(T)$ függvénnyel is, amit az előzőekből Legendre-transzformációval kapunk). Numerikus hidrodinamikai modellezéshez elvileg szinte bármilyen állapotegyenletet választhatunk, egzakt megoldások keresése azonban általános állapotegyenletre reménytelen feladatnak tűnik. Egy egyszerű és jól használható közelítés az ideális gázéhoz hasonló állapotegyenlet:

$$\varepsilon = \kappa p, \quad p = nT. \tag{1.7}$$

Ebben az egyenletben a κ konstans, de értéke mindig más. Nemrelativisztikus (és struktúrátlan részecskékből álló) ideális gázra a statisztikus fizikai állapotösszeget kiszámítva közismerten $\kappa = D/2$ adódik, nulla tömegű (vagy ultrarelativisztikus) részecskék ideális gázára hasonló számolás $\kappa = D$-re vezet (de itt ugye ε értelme más, tartalmazza a nyugalmi energiát is[8]). Ez utóbbi pl. a Boltzmann-féle sugárzási törvény alapja. Érdekesek lehetnek más κ értékekre kapott hidrodinamikai megoldások is, de sokszor kitűnik majd a későbbiekben, hogy az egzakt megoldások keresésekor a legegyszerűbb és legcélszerűbb mégis az (1.7) állapotegyenlet használata $\kappa = D$ (illetve nemrelativisztikusan a $\kappa = D/2$) választással, akkor is, ha az ezekkel kapott megoldások nyilván csak közelítései lehetnek a valóságnak. Megjegyezzük, hogy a κ együtthatót az anyagban érvényes c_s hangsebességgel a $\kappa = \frac{1}{c_s^2}$ módon hozhatjuk kapcsolatba.

Az 1.7 állapotegyenletnek megfelelő termodinamikai potenciálfüggvények a következők[9]:

$$\varepsilon(s,n) = E_0 n \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} e^{\frac{s}{\kappa n}} \quad \text{ha} \quad \mu \neq 0 \quad , \quad \text{ill.} \quad \varepsilon(s) = E_0 \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} \quad \text{ha} \quad \mu = 0. \tag{1.8}$$

[8] Tömeges részecskék relativisztikus ideális gázára az állapotösszeg kiszámításával a

$$p = nT, \quad \varepsilon = \kappa(T)\, p, \quad \kappa(T) \equiv \frac{\partial}{\partial T} \ln \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{sh}^{D-1} t\, \mathrm{ch} t \exp\left\{-\frac{m_0 c^2}{T} \mathrm{ch} t\right\}$$

állapotegyenletet kapjuk (itt kiírtam a c fénysebességet, m_0 pedig egy részecske tömege). Az integrál kifejezhető a MacDonald-függvényekkel. Ezeket a képleteket nem fogjuk használni, a teljesség kedvéért említem meg őket.

[9] Az E_0, n_0, s_0 állandók semmilyen mérhető mennyiségben nem jelennek meg, csak arra szolgálnak, hogy az entrópia „nullpontját” beállítsák. Ez az önkény abból származik, hogy a klasszikus statisztikus fizikában az entrópia csak egy additív állandó erejéig meghatározott mennyiség.

Az utóbbi esetből jól látszik, hogy az ilyen állapotegyenletű anyag adiabatikus tágulásakor az ideális gáz esetében ismertekhez hasonló arányosságok a mérvadóak:

$$n \sim s \sim T^{\kappa}, \quad \varepsilon \sim p \sim T^{\kappa+1}. \tag{1.9}$$

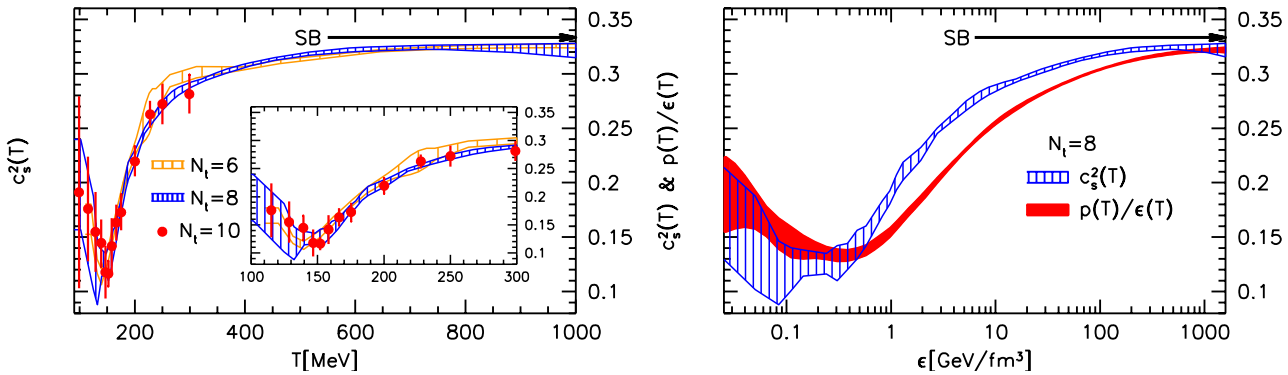
Említésre méltó még, hogy egy korai próbálkozás a kvark-hadron fázisátalakulás során érvényes állapotegyenletre az ún. zsákmodell: ez gyakorlatilag a $p \to p - B$, $\varepsilon \to \varepsilon + B$ helyettesítést jelenti az (1.7) állapotegyenletben, ahol B a *zsákállandó*. Emögött az az egyszerű kép van, hogy a hadronok adott (zsákállandó) mélységű potenciálgödörként viselkednek a szabadsági fok kvarkok számára. A zsákállandó ilyen bevezetése lényegében nem változtatja meg a megfelelő relativisztikus hidrodinamikai megoldások (u^{μ} és p) alakját (azaz ezen mennyiségek tér– és időfüggését), mint azt a 2.1.1. szakasz 1. lábjegyezetében látjuk (de persze a T hőmérséklet alakját igen; éppen erre a célra, fázisátalakulás leírására vezették be a zsákmodellt).

A kvarkanyag valódi állapotegyenletének meghatározására elméleti számítások sora tesz kísérletet. Az 1.1. ábrán a talán legalapvetőbb módszerből, a QCD rácson való megoldásából kapott eredmény, a p nyomás a T hőmérséklet összefüggése látható [20]. A $p \sim T^4$ az ideális gáz esetének felelne meg, a releváns változó tehát p/T^4. Jóval a fázisátmeneti T_c hőmérséklet fölött, ahol a hidrodinamikai modellezést alkalmazni akarjuk, a $p \sim T^4$ törvény közelítőleg igaz, noha az anyag itt sem ideális gáz (az arányossági tényező nem a Stefan-Bolztmann-féle érték). Ezért tehát arra, amire tulajdonképpen alkalmazni akarjuk a hidrodinamikai leírást a nehézionfizikában, közelítőleg használható az ideális gáz fenti állapotegyenlete. Kiderül továbbá a rács-QCD számolásokból, hogy a mai nehézionfizikai ütközési energiájú folyamatokban az állapotegyenletben valóban elhanyagolható a μ_B-függés (azaz a bariokémiai potenciáltól való függés) szerepe [33], ezért jogos a (sokszor alkalmazott) közelítés, amikor a hidrodinamikai egyenletekben csak T és s változásait vizsgáljuk.

Érdemes megjegyezni, hogy az (1.7) állapotegyenlet egy lehetséges általánosítása a κ konstans $\kappa(T)$-re való cseréje, azaz T-függővé tétele, amire mint hőmérsékletfüggő hangsebességre szoktak hivatkozni, a $\kappa(T) = \frac{1}{c_s^2}$ összefüggés alapján. Alkalmas $\kappa(T)$ függvény pontosan leírhatja a különféle számítások alapján kapott kvarkanyag-állapotegyenleteket. A nyomás, mint termodinamikai potenciálfüggvény ilyenkor a kövekező:

$$\varepsilon = \kappa(T)\, p, \quad p = nT \quad \Leftrightarrow \quad p(T,\mu) = p_0 \exp\left\{\frac{\mu}{T} + \int_{T_0}^{T} \frac{\kappa(\xi)+1}{\xi} \mathrm{d}\xi\right\}. \tag{1.10}$$

Általános $\kappa(T)$-ra csak a nemrelativisztikus hidrodinamikai egyenleteknek ismert táguló tűzgömböt leíró megoldása ([34], lásd az 1.5. szakaszt is).



1.1. ábra. Az erősen kölcsönható anyag állapotegyenlete rács-QCD számolások alapján. A fázisátalakulási hőmérsékletnél (171 ± 9 MeV-nél, amennyiben az ún. kvarkszám-szuszceptibilitás alapján definiáljuk az átmenetet) sokkal nagyobb hőmérsékletre a $p \sim T^4$ (ultrarelativisztikus gázra igaz) összefüggés nem nagyon rossz közelítés lehet, noha az arányossági tényező kisebb, mint a Stefan-Boltzmann-állandóból kapható. Az ábra eredetije a [20] hivatkozásban található.

1.4.2. Tökéletes folyadékok mozgásegyenletei

A dolgozatban tökéletes folyadékok egyenleteinek megoldásaival foglalkozunk. Figyeljünk az elnevezésre: ebben a dolgozatban *tökéletes folyadékról* beszélünk, ha az entrópia megmarad, azaz nincs sem belső súrlódás, sem hővezetés. Az *ideális* folyadék hasonlót jelent, de ennek definíciójába néha beleértik, hogy térfogattartó (inkompresszibilis) is. A nehézionfizikában persze szó sincs térfogattartásról: éppen az anyag tágulását akarjuk leírni. A félreértés elkerülése végett tehát „ideális” helyett inkább a „tökéletes folyadék” elnevezést követjük.

Már volt szó róla, hogy a hidrodinamika azért használható egészen különböző tér– és időskálájú folyamatok leírására, mert a dinamika lényegében csak a megmaradási törvényeket használja ki. Relativisztikus esetben az alapegyenletek levezetése ténylegesen így történik. Ehhez a Landau-féle módszert [35] használhatjuk: először felírjuk a folyadék energia-impulzus-tenzorát:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\, u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}. \tag{1.11}$$

Tökéletes folyadékra ezt az alakot az sugallja, hogy lokális nyugalmi rendszerben (azaz ahol lokálisan $u^\mu = (1, \mathbf{0})$) ez átmegy a $T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(\varepsilon, -p, -p, -p)$ formába, ami ε energiasűrűségnek és p izotrop nyomásnak felel meg. Szokás szerint definíciószerűen akkor tekintjük a folyadékot tökéletesnek, ha energia-impulzus-tenzora lokálisan ilyen diagonális alakra hozható megfelelő Lorentz-transzformációval, és ekkor az ehhez a transzformációhoz tartozó u^μ-t hívjuk a folyadék

sebességének. (Súrlódó folyadék esetében a kérdés bonyolultabb, lásd az 1.4.3 szakaszt).

A mozgásegyenletek az energia– és impulzusmegmaradást kifejező, négy független komponensű $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ egyenletből adódnak az előző kifejezés behelyettesítésével. Az u^μ-re ortogonális projekcióval kapjuk a relativisztikus Euler-egyenletet:

$$(\varepsilon + p)\, u^\nu \partial_\nu u^\mu = \left(g^{\mu\rho} - u^\mu u^\rho\right) \partial_\rho p. \tag{1.12}$$

Az u^μ-vel párhuzamos projekció az energiamegmaradást kifejező relativisztikus egyenlet:

$$\partial_\mu \left(\varepsilon u^\mu\right) = -p \partial_\mu u^\mu \quad \Leftrightarrow \quad (\varepsilon + p)\, \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon = 0. \tag{1.13}$$

Ha a folyásban résztvevő anyag megmaradó töltést vagy megmaradó n részecskeszámot hordoz, ennek kontinuitási egyenlete (a bevezetett $n\,(x)$-re):

$$\partial_\mu \left(n u^\mu\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n \partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu n = 0. \tag{1.14}$$

Ezen egyenletek háromdimenziós jelölésmódban felírt alakját u^μ definíciójának behelyettesítésével könnyen levezethetjük. Az Euler-egyenlet, az energiaegyenlet és a részecskeszám kontinuitási egyenlete rendre

$$\frac{\varepsilon + p}{1 - v^2} \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p - \mathbf{v} \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{\varepsilon + p} \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = -\left(\nabla \mathbf{v}\right) - \frac{1}{1 - v^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{v^2}{2}, \tag{1.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln \frac{n}{\sqrt{1 - v^2}} = -\left(\nabla \mathbf{v}\right). \tag{1.17}$$

Ezekből az egyenletekből határátmenettel kiadódnak a nemrelativisztikus egyenletek[10]. Ezek jól ismertek, itt a nehézionfizikában használatos formájukban idézzük fel őket. Emlékezzünk, a nemrelativisztikus esetben ε-ba nem értjük bele a nyugalmi energiát. Az Euler-egyenlet, az energiamegmaradást kifejező egyenlet és a részecskeszám-megmaradás egyenlete rendre

$$m_0 n \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p, \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \left(\varepsilon \mathbf{v}\right) = -p \left(\nabla \mathbf{v}\right), \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = -\left(\varepsilon + p\right) \left(\nabla \mathbf{v}\right). \tag{1.19}$$

[10] Ehhez a $v \ll 1$ feltételnek kell teljesülnie, valamint annak, hogy az $\varepsilon = m_0 n + \varepsilon^{NR}$ felírásban $\varepsilon^{NR} \ll m_0 n$ és $p \ll m_0 n$ teljesüljön, azaz a nyugalmi energiasűrűség a többi feszültségnél sokkal nagyobb legyen. Ekkor az itteni ε^{NR} játssza a nemrelativisztikus esetbeli energiasűrűség szerepét, ami nem tartalmazza a nyugalmi energiát.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla (n\mathbf{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = -(\nabla \mathbf{v}). \tag{1.20}$$

Ezek az egyenletek is nemlineárisak, általános esetben egészen bonyolult folyási képek alakulhatnak ki. Nehézionfizikai alkalmazásokhoz azonban számos egyszerűnek mondható egzakt megoldásuk ismeretes, ezek közül néhányat felidézek az 1.5. szakaszban. A fentiekből is látszik, hogy a relativisztikus egyenletek jóval bonyolultabbak, mint nemrelativisztikus megfelelőik.

1.4.3. Kitekintés: súrlódó folyadékok egyenletei és problémái

A folyadékok belső súrlódása nemrelativisztikus esetben is bonyolultabbá teszi az alapegyenleteket, de koncepcionális problémákat nem okoz. Az összenyomhatatlan súrlódó folyadékok egyenletének, a Navier–Stokes-egyenletnek néhány tulajdonsága ma sem pontosan ismert (sőt, a kezdetiérték-problémája megoldásának egzisztenciakérdése az ismert legnehezebb matematikai problémák közé tartozik [36]), és egzakt megoldásokat is nehezebb találni rá, mint a tökéletes folyadékok egyenleteire. Ezzel együtt senki sem kételkedik abban, hogy a súrlódó folyadékok mozgását leíró helyes egyenleteket nemrelativisztikus esetben ismerjük (összenyomhatatlan folyadékra ez a Navier–Stokes-egyenlet). Disszipatív áramlások relativisztikus tárgyalása viszont ma sem megoldott elvi problémáktól terhelt.

Nem világos, hogy mit értünk a folyadék sebességén, amikor az energia tömeggel ekvivalens, azaz bármilyen energiaáramlásra (pl. hővezetésre is) gondolhatunk úgy, mint ahol tömeg is áramlik. A súrlódó relativisztikus hidrodinamikai egyenletek megalkotására tett első próbálkozás Eckart nevéhez fűződik [37]. Az ő megközelítésében egy megmaradó részecskeszámból indulunk ki (áramsűrűségét N^μ-vel jelöljük). A megmaradási egyenlet alakja

$$\partial_\mu N^\mu = 0, \quad N^\mu = n u^\mu, \quad n = \sqrt{N^\mu N_\mu}. \tag{1.21}$$

Ez egyúttal a négyessebesség definíciója: a részecskeáramlás sebessége. Az energia-impulzustenzorban viszont már megjelennek a belső súrlódási ($\pi_{\mu\nu}$) és hővezetési (q_μ) tagok:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p)\, u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu} + q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu + \pi_{\mu\nu}, \quad q_\mu u^\mu = 0, \quad \pi_{\mu\nu} u^\nu = 0, \quad \pi^\mu_\mu = 0. \tag{1.22}$$

A $\pi_{\mu\nu}$ belső súrlódási tenzorra és a q_μ hőáramra megadott feltételek a p és az ε mennyiségek egyértelmű definíciójához kellenek. A gradiensekben elsőrendű kovariáns kifejezést keresve, és megkövetelve, hogy az entrópiaprodukció pozitív legyen, lényegében egyértelműen adódnak a

$$\pi_{\mu\nu} = \eta \left(\partial_\mu u_\nu + \partial_\nu u_\mu - u_\mu u^\rho \partial_\rho u_\nu - u_\nu u^\rho \partial_\rho u_\mu\right) + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)\left(\partial_\rho u^\rho\right)\left(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu\right), \tag{1.23}$$

$$q^\mu = \kappa \left(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu\right)\left(\partial_\nu T - T u^\rho \partial_\rho u_\nu\right) \tag{1.24}$$

alakok, η és ζ súrlódási és κ hővezetési együtthatókkal. A mozgásegyenleteket a $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ feltétel tartalmazza. Ennek az Eckart-féle elméletnek több hiányossága is van. Egyrészt nem kauzális, fénynél gyorsabb információcsere is megvalósulhat benne[11]. Egy talán még kellemetlenebb probléma, hogy a nyugvó, homogén folyadékot leíró megoldás kis perturbációkra nézve nem stabil [38] (ami pedig alapvető követelmény lenne). A nagyenergiás fizikában továbbá felmerül a kérdés, hogy hogyan definiálható a részecskeszám.

A Landau-féle tárgyalás (lásd pl. [35]) éppen abban különbözik, hogy ott a négyessebesség definíció szerint az energiaáram irányába mutat. Emiatt az N^μ áramsűrűségben megjelenik egy kompenzáló tag: $N^\mu = nu^\mu + j^\mu$, viszont nincs „külön" hővezetés, az energia-impulzus-tenzor (1.22) alakú $q_\mu \equiv 0$ kitétellel. Hasonló megfontolásokkal, mint az Eckart-esetben, kiderül, hogy noha u^μ definíciója más, $\pi_{\mu\nu}$ ugyanolyan alakú függvénye u_μ-nek, mint (1.23)-ban, j^μ pedig

$$j_\mu = \kappa \left(\frac{nT}{\varepsilon + p}\right)^2 \left(\partial_\mu - u_\mu u^\rho \partial_\rho\right) \frac{\mu}{T} \tag{1.25}$$

alakúnak adódik. Nem nyilvánvaló, hogy az Eckart– és a Landau-módszer ekvivalens lenne. A Landau-féle elmélet mindazonáltal könnyen felírható a $\mu = 0$, $n = 0$ esetre (ami a nehézionfizikai alkalmazásban előnyös). Az akauzalitás és az instabilitás itt is fennáll [38].

Kauzális elmélethez kézenvekvő, ha hiperbolikus egyenletekkel próbálkozunk. Ilyeneket úgy lehet kapni, hogy a mikroszkopikus, kinetikai egyenletből indulva a makroszkopikus mennyiségekre áttérő átlagolás során a nulladrendű (azaz tökéletes folyadékot leíró) és elsőrendű (azaz az ismert elsőrendű súrlódó hidrodinamikai) közelítésen túlmegyünk: magasabbrendű deriváltak, és az állapotegyenleten belül is dinamikai mennyiségek jelennek meg. Ekkor persze a disszipatív tulajdonságokat már nem csupán három együttható (κ, η, ζ) adja meg. Az elmélet ismertetésére itt nem térek ki, csak megjegyzem, hogy ez valóban stabil, kauzális, de hiperbolikus és időben másodrendű egyenleteket ad. Ezt a módszert először Israel és Stewart alkalmazt [39], és a másodrendű elméletek fejlesztése aktív kutatási téma. A mai numerikus számolásokban egyre inkább másodrendű elméleteket használnak a Landau-módszer helyett. Az elsőrendű egyenletek kutatásában új irányt jelent a relativisztikus termodinamika konzisztens felépítése [40].

A súrlódó folyadékokra vonatkozó alapelveket itt csak a teljesség kedvéért vázoltam fel. Jelenleg nem lezárt kérdés az alapegyenletek tisztázása sem, és nem is ismeretes a nehézionfizikában használható súrlódó relativisztikus egzakt hidrodinamikai megoldás (bármilyen megköze-

[11] Ez kiderül pl. abból, hogy a hővezetés egyenletére a hagyományos diffúzióegyenlettel rokon alakú, elliptikus differenciálegyenlet adódik, aminek Green-függvénye, a $\sigma^2 \sim t - t_0$ szélességű Gauss-eloszlás nem kauzális. Vita folyik arról, hogy ez mekkora probléma: egy lehetséges feloldás, hogy olyan esetekben, amikor fénynél gyorsabb információközlés valósulna meg, eleve a makroszkopikus, hidrodinamikai leírás érvényét veszti.

lítésben). A továbbiakban nem is foglalkozunk ezzel a kérdéskörrel, hanem rátérünk a tökéletes folyadékokra vonatkozó egzakt megoldások tárgyalására. Ezeket — mivel a kísérletekben létrejövő kvarkanyag súrlódása igen kicsi — jól használhatjuk az időfejlődés követésére. (Kivétel persze, ha éppen a súrlódás nagyságát szeretnénk a kísérletekből meghatározni.)

1.5. Ismert egzakt megoldások

Ebben a szakaszban felidézek néhány ismert eredményt: egzakt nemrelativisztikus és relativisztikus megoldásokat és megoldásosztályokat, ezek főbb jellemzőit. Ezek — illetve az, hogy a relativisztikus esetben viszonlag kevés egyszerű egzakt eredmény volt ismert — jelentették részben a motivációt a további megoldások kereséséhez.

1.5.1. Nemrelativisztikus eset: önhasonló megoldások

A nemrelativisztikus alapegyenletek jóval egyszerűbbek a relativisztikusaknál, így könnyebb rájuk egzakt megoldást is találni. Létezik egy egészen általános parametrikus megoldásosztály [41], amely tulajdonságait tekintve talán a lehető legjobban illeszkedik a nehézion-ütközésekről alkotott képünkhöz (már amennyire ez egy egzakt megoldástól elvárható). Ez a megoldás speciális esetek egymás utáni felderítésével vált ismertté, ezek közül a következő szakaszban összefoglalom a fontosabbakat, de az általános esettel kezdem.

A megoldás önhasonló (a kozmológiai Hubble-törvényhez hasonló) tágulást ír le, a karakterisztikus felületek pedig (táguló) önhasonló háromtengelyű ellipszoidok. Ezek az alábbi A függvény szintfelületei:

$$A\left(r_x, r_y, r_z, t\right) = \frac{r_x^2}{a^2\left(t\right)} + \frac{r_y^2}{b^2\left(t\right)} + \frac{r_z^2}{c^2\left(t\right)}. \tag{1.26}$$

Itt az $a\left(t\right)$, a $b\left(t\right)$ és a $c\left(t\right)$ függvények az ellipszoidok tengelyei az idő függvényében. Látható, hogy az önhasonló ellipszoidok seregét az $A = const$ felületek adják meg. A megoldáshoz tartozó sebességmező pedig olyan, ami illeszkedik ezekhez az ellipszoidokhoz: belátható, hogy ha a $\mathbf{v}$ az alábbi (önhasonló) alakú, akkor az A függvény együttmozgó deriváltja eltűnik:

$$v_x = \frac{\dot{a}\left(t\right)}{a\left(t\right)} r_x, \quad v_y = \frac{\dot{b}\left(t\right)}{b\left(t\right)} r_y, \quad v_z = \frac{\dot{c}\left(t\right)}{c\left(t\right)} r_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla A = 0. \tag{1.27}$$

A továbbiakban az ilyen tulajdonságú (mindig A-val jelölt) függvényeket *skála–* vagy skálázófüggvényeknek fogom nevezni. (Az elnevezés oka, hogy ebben a speciális önhasonló megoldásosztályban A különböző értékeinek az önhasonlósági, vagy skálatranszformációval egymásba vihető felületek, ellipszoidok felelnek meg.) Ezek — mivel az együttmozgó derivált a hidrodina-

mikai egyenletekben sokszor előfordul — fontos szerepet töltenek majd be egzakt megoldások keresésében.

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a következő képletek a nemrelativisztikus hidrodinamika (1.18)–(1.20) egyenleteinek megoldását adják (az (1.7) állapotegyenlet esetére) [41]:

$$v_x = \frac{\dot{a}}{a} r_x, \quad v_y = \frac{\dot{b}}{b} r_y, \quad v_z = \frac{\dot{c}}{c} r_z, \quad A = \frac{r_x^2}{a^2} + \frac{r_y^2}{b^2} + \frac{r_z^2}{c^2}, \quad V \equiv abc, \quad n = n_0 \frac{V_0}{V} \nu(A), \tag{1.28}$$

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1/\kappa} \tau(A), \quad \nu(A) = \frac{1}{\tau(A)} \exp\left\{-\frac{T_i}{2T_0} \int_0^A \frac{1}{\tau(\xi)} \mathrm{d}\xi\right\}. \tag{1.29}$$

A két bevezetett egyváltozós függvény, $\nu(A)$ és $\tau(A)$ kapcsolata nem tetszőleges, de egyébiránt $\tau(A)$-t tetszőlegesen választhatjuk. A nulla index a kezdeti értékeket jelenti, a V mennyiség pedig az ellipszoid valamilyen értelmű „térfogatának” mértéke. Az a, b, c tengelyek időfejlődését egy további egyenlet korlátozza: abban az esetben kapunk megoldást, ha

$$a\ddot{a} = b\ddot{b} = c\ddot{c} = \frac{T_i}{m_0} \left(\frac{V_0}{abc}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{m_0}{2}\left(\dot{a}^2 + \dot{b}^2 + \dot{c}^2\right) - \kappa T_i \left(\frac{V_0}{abc}\right)^{\frac{1}{\kappa}}. \tag{1.30}$$

Ez utóbbi, a tengelyek időfejlődését meghatározó egyenlet egy a, b, c koordinátájú részecskének adott nemrelativisztikus potenciálban történő newtoni mozgásegyenleteként fogható fel, felírtam az ehhez tartozó Lagrange-függvényt. Ezen mozgásegyenletek egzakt megoldása általános esetben nem ismert[12], az viszont látszik, hogy a potenciál taszító és nagy a, b, c értékekre eltűnő erőt ad, tehát nagy időkre növekvő, mégpedig állandósult sebességgel növekvő $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ függvényeket várunk: $a(t) \simeq \alpha_1 t + \alpha_2$, $b(t) \simeq \beta_1 t + \beta_2$, $c(t) \simeq \gamma_1 t + \gamma_2$.

Mivel a $\tau(A)$ függvény tetszőleges, szép általános alakú hőmérsékletprofilokat írhatunk le ezzel az egzakt megoldással. A már említett Buda-Lund-modell alapja ez és az ehhez hasonló tulajdonságú relativisztikus hidrodinamikai megoldások. (Az eredeti Buda-Lund-parametrizációnak $\tau(A) = \frac{1}{1+bA}$, $b \in \mathbb{R}$, és az ebből (1.29) szerint kapható $\nu(A)$ felel meg.) Érdemes felfigyelni arra, hogy a nagy időkre megvalósuló végállapot tulajdonképpen azonos lehet igen különböző kezdeti feltételek esetén is, tehát a — kifagyáskori állapotot tükröző — hadronikus megfigyelhető mennyiségekből ezen megoldás alapján nem tudunk egyértelműen visszakövetkeztetni a tágulás történetére és kezdeti feltételeire.

[12] Az $a = b = c$ (gömbszimmetrikus) esetben megtalálható a megoldás, ennek $\kappa = 3/2$-re igen egyszerű alakja van, ezt lentebb láthatjuk. Ismert továbbá, hogy $\kappa = 3/2$-re általános esetben is megállapítható egzakt formában az $a^2 + b^2 + c^2$ „abszolút méret” időfejlődése, az (1.30) energiaintegráljából. Már M.Sc. szakdolgozatomban [42] sikerült megmutatnom, hogy a kétdimenziós analóg eset $\kappa = D/2$, azaz $\kappa = 1$ választásra integrálható kvadratúrákkal; ezt itt nem írom le, mivel lényegesen nem járul hozzá az általános eset megértéséhez.

1.5.2. Nemrelativisztikus eset: speciális esetek

Az előző szakaszban látott megoldás speciális esetei önmagukban is érdekesek. Igen fontos eset, amikor $\tau(A) = 1$ konstans, azaz térben homogén a hőmérséklet [34]. Ekkor (az (1.29) egyenlet alapján) a részecskeszám-profil $n \sim \exp(-const \cdot A)$, azaz térbeli Gauss-alakú lesz. Ebből a megoldásból (a tengelyek végállapoti sebességének és értékének ismeretében) egzakt módon, közelítés nélkül kiszámítható sok megfigyelhető mennyiség: az egyrészecske-spektrum, az elliptikus folyás, a kétrészecske-korrelációs függvények és az őket Gauss-alakot feltételező parametrizációban jellemző HBT-sugarak. Ez a megoldásosztály tudtommal egyedi abban az értelemben is, hogy kiterjeszthető általánosabb, $\varepsilon = \kappa(T)\,p$, $p = nT$ állapotegyenletre is. Ez a kiterjesztés teljesen hasonló alakú, az egyetlen különbség, hogy a tengelyek mozgását (1.30) helyett más, a $\kappa(T)$ függvénykapcsolat alakjától függő mozgásegyenlet határozza meg [34].

Külön említést érdemel a gömbszimmetrikus $\tau(A) = 1$ eset. Ekkor a $\kappa = 3/2$ esetre az (1.30) egyenlet egyszerűen megoldható (az a a gömb sugara, ekkor tehát $a(t) = b(t) = c(t)$):

$$a^2(t) = \frac{T_i}{m_0}(t - t_0)^2 + a_0^2, \tag{1.31}$$

ahol $V_0 = a_0^3$, a_0 pedig a $t = t_0$ időpontban adott kezdeti feltétel (tehát t_0 és a_0 integrációs konstansok). Ez a gömbszimmetrikus egzakt megoldás már korábban ismert volt [43], és a neki megfelelő fázistérbeli eloszlásfüggvény egy rendkívüli tulajdonsága miatt különleges figyelmet érdemel. A 3. fejezetben ezt fejtem ki, és a problémakört relativisztikus hidrodinamikára is általánosítom. Eközben forgó tágulást leíró megoldásokat is találunk.

Végül megemlítjük az 1978-ból származó első önhasonló hidrodinamikai megoldást, a kisebb energiájú magfizikában egykor kiterjedten használt Zimányi-Bondorf-Garpman-megoldást [44]. Ezen alapult lényegében minden ebben a szakaszban felidézett nemrelativisztikus megoldás, ill. a Buda-Lund modell is. A Zimányi-Bondorf-Garpman-megoldás a mostani jelölésben (1.29-nek gömbszimmetrikus, a $\tau(A) = 1 - A$ választáshoz tartozó speciális esete. Érdekes jellemzője, hogy ekkor $\tau(A)$ és $\nu(A)$ egymás hatványai (a szerzők eredetileg ebből a feltételből indultak ki.) Az $a(t)$ explicit alakját itt is (1.31) adja meg.

1.5.3. Relativisztikus eset

A relativisztikus hidrodinamika egyenletei Landau munkáiban bukkannak fel először, és az első jelentős egzakt megoldás is, mely ma *Landau-Khalatnikov-megoldás* néven ismert, ekkorból származik [23, 24, 25]. Ez egy $1+1$ dimenziós, (1.7) szerinti, $\kappa = 3$-mal jellemzett állapotegyenletű megoldás, amely egy kezdetben nyugalomban lévő, véges hosszúságú anyagdarab gyorsuló

tágulását írja le. Hátránya, hogy implicit módon írható csak fel: a t idő– és az r_z helykoordináta zárt képletekkel nem kiértékelhető integrálformulákkal van megadva mint T és a v függvénye. (Az A.3. függelékben röviden összefoglalom az ehhez a megoldáshoz vezető gondolatmenetet).

Egy igen fontos és jól mérhető megfigyelhető mennyiség volt már a kozmikus sugaras kísérletek korában is a keletkező hadronok rapiditáseloszlása, $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$. A Landau-Khalatnikov-megoldás alapján számolva $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-ra közelítőleg Gauss-alakot kapunk y-ban, ami első közelítésben jól egyezik a mérési eredményekkel. Az implicit felírás azonban nagyon megnehezíti, hogy a mért értékek alapján, visszakövetve a hidrodinamikai evolúciót, feltárjuk a kezdeti állapotot.

Az egzakt relativisztikus hidrodinamikai megoldások másik jól ismert példája a Hwa-Bjorken-megoldás [45, 46], sok tekintetben a Landau-Khalatnikov-megoldás „ellenpontja". Ez szintén $1+1$ dimenziós áramlás, rendkívül egyszerű, gyorsulásmentes, és boost-invariáns. (Ez azt jelenti, hogy minden, a laborrendszerhez képest egyenletesen mozgó megfigyelő pontosan ugyanolyan alakúnak látja az áramlást.) Ebből többek között következik, hogy a belőle számolt rapditáseloszlás (minthogy a rapiditás Lorentz-boostokra additívan viselkedik) konstans. Ez a kép akkor indokolható, ha a „végtelen nagy ütközési energia" határesetét vizsgáljuk, biztosan nem igaz azonban valós esetben (már csak az összenergia végessége miatt sem). A 4. fejezetben részletesen foglalkozom a rapiditáseloszlás kiszámításával (egy általam talált megoldásosztály esetében, melynek a Hwa-Bjorken-megoldás egy határesete).

A Hwa-Bjorken-megoldás felírására a legcélszerűbb az (ezentúl is lépten-nyomon előkerülő) ún. *Rindler-koordináták* használata, amelyeket most úgy definiálunk, hogy többdimenziós gömbszimmetrikus esetben és $1+1$ dimenzióban is használhatóak legyenek[13]. Az r ilyenkor a sugárirányú helykoordinátát fogja jelölni, $D = 1$-re pedig az egyetlen térkoordinátát. A fénykúpon belül (azaz $r < t$-re) a τ és η Rindler-koordináták definíciója:

$$\tau = \sqrt{t^2 - r^2}, \quad \eta = \mathrm{Ar\,th}\frac{r}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad t = \tau \mathrm{ch}\eta, \quad r = \tau \mathrm{sh}\eta, \tag{1.32}$$

A τ-t *sajátidőnek*, az η-t *pszeudorapiditásnak* nevezzük, a nehézionfizikai irodalomban elfogadott terminológia alapján, noha általában τ és η semmilyen folyadékelemnek nem sajátideje ill. rapiditása. A Hwa-Bjorken-megoldást viszont (csakúgy, mint több dimenzióban a lentebb felidézett önhasonló Hubble-típusú megoldásokat) éppen az jellemzi, hogy τ és η a folyadékelemek sajátideje ill. rapiditása: ekkor a sebességmező és az entrópiasűrűség alakja a következő:

$$v = \frac{r}{t} = \mathrm{th}\eta, \quad \Leftrightarrow \quad u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau}, \quad s = s_0 \frac{\tau_0}{\tau}. \tag{1.33}$$

[13] Nevezhetjük ezeket *gömbi Rindler-koordinátáknak* is, hiszen általában csak az egydimenziós esetben beszélnek Rindler-koordinátázásról. $1+1$ dimenziós esetben ez a koordinátázás akkor is kerül elő, ha a sík téridőben konstans saját-gyorsulású megfigyelők világvonalait vizsgáljuk.

Könnyen leellenőrizhető, hogy így valóban (egyszerű, gyorsulásmentes) megoldást kapunk, ha az állapotegyenletet $\varepsilon = \kappa p$ és $\mu = 0$ alakban vesszük fel, tetszőleges κ-val. Megkaphatjuk T és p kifejezését is, melyek persze már nem ugyanazok κ különböző értékeire (noha v és s kifejezése minden κ-ra ugyanaz[14]). Ez a megoldás tehát rendkívül egyszerű: éppen ezért pl. a mért rapiditáseloszlásból könnyen visszaszámolható a kezdeti energiasűrűség. Az így kapott becslési módszer jelentőségében messze túlnőtt magán a hidrodinamikai megoldáson, a mai kísérletek (RHIC, LHC) is kiterjedten alkalmazzák[15]. A táguló anyag viszont a valóságban, véges $\sqrt{s}$ ütközési energián bizonyára nem gyorsulásmentesen mozog, ezért is érdemes gyorsulást is tartalmazó megoldásokat keresni. A Bjorken-féle energiabecsléssel és lehetséges pontosításával a 4. fejezetben foglalkozom.

Az újabb relativisztikus hidrodinamikai megoldások között mindenképpen ki kell emelni az előző szakaszban látott nemrelativisztikus megoldásokhoz hasonló Hubble-típusúakat [48, 49]. Az egyik fontos megoldásosztály gyorsulásmentes, Hubble-típusú tágulást ír le (mely a Bjorken-megoldás többdimenziós általánosításaként is felfogható):

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{t} = \mathrm{th}\eta \quad \Leftrightarrow \quad u^\mu = \frac{x^\mu}{t}, \quad A = \frac{r_x^2}{a_0^2 t^2} + \frac{r_y^2}{b_0^2 t^2} + \frac{r_z^2}{c_0^2 t^2},$$

$$n = n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^3 \nu\left(A\right), \quad T = T_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\frac{3}{\kappa}} \frac{1}{\nu\left(A\right)}, \quad p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{3\frac{\kappa+1}{\kappa}}, \quad p_0 = n_0 T_0. \tag{1.34}$$

A sebességmező és az A változó (1.28) olyan speciális esetének tekinthető, ahol a tengelyek gyorsulásmentesen tágulásban vesznek részt. A $\tau\left(A\right) = \frac{1}{1+bA}$ választás itt is a Buda-Lund-parametrizációnak felel meg.

A következőkben rátérek saját munkámra. A dolgozatban leírt fő eredményeim, az új egyszerű, gyorsuló egzakt megoldások abba a vonulatba próbálnak beleilleszkedni, ahova az itt felidézett ismert megoldások nagy része is: a jórészt Zimányi József és Csörgő Tamás által elindított folyamatba, amely az egyszerű megoldásokon alapuló hidrodinamikai modellek fejlesztését tűzte ki célul, az adatokban mutatkozó egyszerű skálaviselkedések alapján. Az egzakt megoldások keresése talán kevésbé felfutott, mint a numerikus módszerek alkalmazása hidrodinamikai modellezésre, mindazonáltal állandó érdeklődésre tarthat számot. Az összefoglaló 5. fejezetben röviden kitérek a saját munkámmal egyidejű vagy azóta elért új eredményekre is.

[14] Az (1.33)-ban adott sebességmező alapján még általánosabb állapotegyenletre is adható hidrodinamikai megoldás: megemlítjük pl. a zsákállandó (lásd az 1.4.1. szakasz) bevezetésével kapható megoldást, melyet Gyulassy és Matsui vezetett be [47].

[15] Ez az oka annak, hogy noha magát a megoldást R. C. Hwa már 1974-ben, majdnem 10 évvel Bjorken előtt felírta, szinte csak Bjorken-megoldásként ismeretes az irodalomban.

2. fejezet

Új egzakt relativisztikus megoldások

Az előző fejezetben felvázoltam néhány nehézionfizikában alkalmazott típusú ismert hidrodinamikai megoldást. E fejezet első szakaszában megvizsgálok néhány olyan, részben már ismert, részben saját magam által kidolgozott módszert, amelyek segítségével egyszerűbbé lehet tenni a hidrodinamikai egyenleteket, Az itt leírt módszerek önmagukban is érdekesek. A fejezet további részeiben pedig bemutatok egy új megoldásosztályt, amely sok szempontból egyedi: egyszerű, explicit és egzakt, a folyadék gyorsulása pedig nemeltűnő. Korábban nem volt ismert ilyen típusú relativisztikus hidrodinamikai megoldás. (Az előző fejezet végén látott Landau-Khalatnikov-megoldás ugyan gyorsuló, de implicit módon adott, és nagyon bonyolult, a többi korábban ismert relativisztikus megoldás, beleértve az egyszerű Hwa-Bjorken-megoldást is, nem gyorsuló tágulást ír le.) A fejezetben leírt eredményeim, az új relativisztikus gyorsuló megoldások az [50] és az [51] publikációkban jelentek meg.

2.1. Egzakt megoldások keresése

2.1.1. Az egyenletek Rindler-koordinátákban

Egyszerűsége miatt külön vizsgálatot érdemel a gömbszimmetrikus (vagy az 1+1 dimenziós) eset. Mint az 1.5.3. szakaszban megállapodtunk, a sugárirányú koordinátát ($D = 1$-re pedig az egyetlen térkoordinátát) r jelöli. Gömbszimmetrikus esetben a hármassebesség nemeltűnő komponensét egyszerűen v-vel jelölöm. A sebességmező helyett néha az Ω-val jelölt rapiditást fogjuk használni, melynek definíciója a szokásos: $v(t,r) = \operatorname{th}\Omega(t,r)$. Továbbá ponttal és vesszővel jelölöm a t idő és az r helykoordináta szerinti parciális deriváltakat: $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$, $f' \equiv \frac{\partial f}{\partial r}$.

A fénykúpon belül (azaz $r < t$-re) használhatjuk az (1.32) definícióval bevezetett τ és η gömbi Rindler-koordinátákat. (Ezt a Hwa-Bjorken-megoldás egyszerűsége is sugallja.) A

deriválási szabályok így alakulnak:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathrm{ch}\eta\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\mathrm{sh}\eta}{\tau}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = -\mathrm{sh}\eta\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\mathrm{ch}\eta}{\tau}\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{2.1}$$

Ha az (ideális gázéhoz hasonló) (1.7) állapotegyenletet használjuk, kitűnik, hogy az n-re vonatkozó kontinuitási egyenlet lecsatolódik az Euler-egyenletről és az energiamegmaradási egyenletről, azaz — főleg, ha a részecskeszám nem érdekes a tárgyalás szempontjából — elég ezt a két egyenletet vizsgálni[1]. Erre az esetre a nyomás helyett bevezethetjük a később is használt $Q \equiv \frac{1}{\kappa+1}\ln(p/p_0)$ mennyiséget (ahol a p_0 egy tetszőletes skála), amivel a két megoldandó egyenlet (az Euler– és az energiaegyenlet) tehát így alakul:

$$Q \equiv \frac{1}{\kappa+1}\ln(p/p_0), \quad \frac{1}{1-v^2}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla Q - \mathbf{v}\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{2.2}$$

$$\kappa\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{1-v^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v^2}{2} - (\nabla\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \left(\kappa - v^2\right)\frac{\partial Q}{\partial t} + (\kappa-1)\,\mathbf{v}\nabla Q + (\nabla\mathbf{v}) = 0. \tag{2.3}$$

Az energiaegyenlet megfelelőjének két felírt formája egyenértékű, mint az a (2.2) Euler-egyenletből könnyen látható. Gömbszimmetrikus esetben ezek az egyenletek így alakulnak:

$$\frac{\dot{v} + vv'}{1-v^2} = -Q' - v\dot{Q}, \quad \frac{v' + v\dot{v}}{1-v^2} = -\kappa\left(\dot{Q} + vQ'\right) - \frac{D-1}{r}v. \tag{2.4}$$

Egyszerű átalakításokkal felírhatjuk a Rindler-koordinátákkal kifejezett alakokat is. Ez az előbb bevezetett Ω rapiditás segítségével kényelmes. A (2.4) egyenletek megfelelői a következők:

$$\mathrm{ch}(\Omega-\eta)\left(\tau\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right) + \mathrm{sh}(\Omega-\eta)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \tau\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right) = 0, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{ch}(\Omega-\eta)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \kappa\tau\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right) + \mathrm{sh}(\Omega-\eta)\left(\tau\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \kappa\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right) + \frac{D-1}{\mathrm{sh}\eta}\mathrm{sh}\Omega = 0. \tag{2.6}$$

Nemsokára (a 2.3. szakaszban) visszatérünk ezen egyenletek további vizsgálatára[2]. (Addig is rögtön beláthatjuk ezekkel az egyenletekkel, hogy az (1.33) Hwa-Bjorken–, ill. az (1.34) egyenletekkel adott Buda-Lund-típusú megoldások valóban megoldások.) A következőkben

[1] Az 1.4.1. szakaszban röviden megemlítettem a zsákmodell alapján kapott állapotegyenletet, amit a $p \to p - B$, $\varepsilon \to \varepsilon + B$ helyettesítés ír elő. Ettől az Euler-egyenletben a relativisztikus tömeg szerepét betöltő $\varepsilon + p$ entalpia láthatóan nem változik, csakúgy, mint p és ε gradiensei sem. Így tehát bármilyen, az (1.7) állapotegyenlethez tartozó megoldás érvényes lesz a zsákállandó bevezetése után is, a megfelelő helyettesítésekkel. A T hőmérséklet időfejlődése persze érzékeny a zsákállandóra.

[2] A Rindler-koordinátákat itt a fizikailag inkább releváns téridő-tartományban, a jövőbeli fénykúpon belül vezettük be. Az A.2. függelékben részletesen megnézzük, hogy milyen egyenletek adódnak a fénykúpon kívüli hasonló koordinátarendszerben.

bemutatom az egyenletek egy másik érdekes megközelítését.

2.1.2. Relativisztikus potenciáláramlás és általánosítása gömbszimmetrikus esetben

A relativisztikus hidrodinamikai egyenletek bonyolult csatolt nemlineáris egyenletek. Minden olyan átalakítás, módszer, kritérium hasznos lehet, ami közelebb visz a megoldáshoz. Ha már pl. a $\mathbf{v}$ sebességmező alakja ismert, akkor abból egyszerűbben lehet aztán a többi mennyiségre vonatkozó egyenleteket megoldani. Ebben és a következő szakaszban egy olyan módszert vázolok fel[3], amely egyszerűbb egyenletekre vezeti vissza a problémát.

A termodinamikai összefüggések, (1.4) és (1.5) felhasználásával alternatív alakokban is megfogalmazhatjuk a hidrodinamikai egyenleteket. Jól ismert [23], hogy az entrópiamegmaradás egyenlete (amit tökéletes folyadékra valóban elvárunk, hogy teljesüljön) tényleg ekvivalens az (1.13) energiaegyenlettel: behelyettesítve (1.4)-et és (1.5)-öt (1.13)-ba a következőt kapjuk:

$$(\varepsilon + p)\,\partial_\mu u^\mu + u^\mu \partial_\mu \varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad (Ts + \mu n)\,\partial_\mu u^\mu + T u^\mu \partial_\mu s + \mu u^\mu \partial_\mu n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T\partial_\mu\left(s u^\mu\right) + \mu \partial_\mu \left(n u^\mu\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \left(s u^\mu\right) = 0, \tag{2.7}$$

azaz az s entrópiasűrűségre ugyanolyan alakú kontinuitási egyenlet igaz, mint az n-re vonatkozó az (1.14) ill.(1.17). A következtetés érvényes akkor is, ha $\mu = 0$, és akkor is, ha $\mu \neq 0$, de n-re (1.14) érvényes. Hasonló átalakításokkal az Euler-egyenlet egy alternatív formáját is felírhatjuk:

$$(Ts + \mu n)\, u^\nu \partial_\nu u^\mu = \left(g^{\mu\rho} - u^\mu u^\rho\right)\left(s\partial_\rho T + n\partial_\rho \mu\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{s}{T}\left[\partial_\mu\left(T u_\nu\right) - \partial_\nu\left(T u_\mu\right)\right]\left(T u^\nu\right) + \frac{n}{\mu}\left[\partial_\mu\left(\mu u_\nu\right) - \partial_\nu\left(\mu u_\mu\right)\right]\left(\mu u^\nu\right) = 0. \tag{2.8}$$

Ha pl. $\mu = 0$ (vagy akár ha μ/T konstans), csak T és u^μ szerepel az Euler-egyenletben. Ilyen esetben látható, hogy ennek a (2.8) alatti formájára egyszerű megoldást kaphatunk egy $\Phi(x)$ potenciálfüggvény bevezetésével, úgy, hogy maguk a benne felbukkanó antiszimmetrikus tenzorok eltűnjenek[4]:

$$\frac{\mu}{T} = const, \quad T u_\mu = \partial_\mu \Phi \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\partial_\nu \Phi \partial^\nu \Phi}, \quad u_\mu = \frac{\partial_\mu \Phi}{T}, \quad \mathbf{v} = -\frac{\nabla \Phi}{\dot{\Phi}}. \tag{2.9}$$

[3] Az itt tárgyalt módszerek részben saját meggondolásokat tartalmaznak, részben Landau, Khalatnikov és Belenkij munkáiban [23, 24, 25] is felbukkannak; ebben az esetben ezt mindig külön hangsúlyozom.

[4] A $\mu = 0$ feltevést nehézionfizikai reakciók modellezésénél valóban gyakran felteszik. Az 1.3. szakaszban említett Buda-Lund-modellből kapott eredmények szintén értelmezhetők úgy, hogy μ/T konstans [52, 53]; mindezek miatt tehát érdemes ezzel a lehetőséggel foglalkozni.

Ezt az áramlásfajtát nevezik néha relativisztikus potenciáláramlásnak. Landau és Khalatnikov munkájában [23, 24, 25] a $\mu = 0$ esetben szerepel ez a fajta átalakítás.

Gömbszimmetrikus esetben, amikor a sebességmezőnek csak a $v(t,r)$ sugárirányú komponense szerepel, egyfajta fordított megközelítéssel is dolgozhatunk. Az alapegyenletekben lépten-nyomon előforduló együttmozgó derivált sugallja, hogy (mint a korábban bemutatott ismert egzakt megoldások esetében is) bevezessük az $A(t,r)$-rel jelölt függvényt $v(t,r)$ alternatívájaként azzal a definícióval, hogy A együttmozgó deriváltja eltűnik:

$$\frac{\partial A(t,r)}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla A(t,r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{A} + vA' = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t,r) = -\frac{\dot{A}}{A'}. \tag{2.10}$$

Adott $A(t,r)$ függvény egyértelműen meghatározza v-t, adott $v(t,r)$ pedig önmaga egy függvénye erejéig meghatározza A-t: adott A helyett $f(A)$ is ugyanazt a v sebességmezőt adja, ha f lokálisan invertálható függvény, hiszen (2.10) alapján a folyadékelemek világvonalait A-nak a t, r koordinátarendszerbeli szintvonalai adják meg, amelyek ugyanazok, mint $f(A)$ szintvonalai. (Más szóval: $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0$ esetén $\frac{\mathrm{d}f(A)}{\mathrm{d}t} = 0$ is teljesül, vagyis $f(A)$ is jó skálafüggvény.) Az eddigiek alapján könnyű számolással ellenőrizhető az is, hogy D dimenzióban gömbszimmetrikus esetben v divergenciájára teljesül az alábbi összefüggés:

$$(\nabla\mathbf{v}) = v' + \frac{D-1}{r}v = -\frac{\dot{A}'A' - \dot{A}A''}{A'^2} - \frac{D-1}{r}\frac{\dot{A}}{A'}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{A'}{r^{D-1}} = -(\nabla\mathbf{v}). \tag{2.11}$$

Az (1.17)-ben háromdimenziós formában felírt kontinuitási egyenlet így egyszerűen megoldható:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\ln\frac{n}{\sqrt{1-v^2}} - \ln\frac{A'}{r^{D-1}}\right\} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{nr^{D-1}}{A'\sqrt{1-v^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = A'\sqrt{1-v^2}\frac{\nu(A)}{r^{D-1}}. \tag{2.12}$$

Itt $\nu(A)$ tetszőleges függvény lehet. Ha A helyett $\tilde{A} = f(A)$-t használunk, akkor v ugyanaz marad, $\tilde{A}$ első deriváltjai A deriváltjainak $f'(A)$-szorosai lesznek, tehát $\nu(A)$ átdefiniálásával ugyanilyen alakot kapunk. Az s entrópiasűrűségre teljesen ugyanez a gondolatmenet alkalmazható, egy másik, $\xi(A)$ függvény bevezetésével. Végül tehát az n-re és s-re vonatkozó egyenletek megoldása:

$$n = \sqrt{A'^2 - \dot{A}^2}\frac{\nu(A)}{r^{D-1}}, \quad s = \sqrt{A'^2 - \dot{A}^2}\frac{\xi(A)}{r^{D-1}}, \quad v = -\frac{\dot{A}}{A'}. \tag{2.13}$$

Ha tehát adott egy $A(t,r)$ függvény, már csak az Euler-egyenletet kell megoldanunk. Ehhez most A-ból kiindulva vezessük be az $U(t,r)$ függvényt úgy, hogy U szintvonalai pszeudoortogonálisak legyenek A szintvonalaira. (Fontos megjegyezni, hogy az ilyen tulajdonságú U is csak önmaga egy függvénye erejéig meghatározott; a végső képletek viszont olyanok lesznek, hogy átalakíthatóak úgy, hogy ha U helyébe tetszőleges $V = f(U)$-t teszünk, ugyanazt a hidrodi-

namikai megoldást adják.) A mondott feltétel alapján (2.10)-et használva $v(t,r)$-et U-val is kifejezhetjük:

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu U\partial_\nu A = \dot{U}\dot{A} - U'A' = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{U'}{\dot{U}} \quad \Leftrightarrow \quad u_\mu = \frac{\partial_\mu U}{\sqrt{\partial_\nu U\partial^\nu U}}. \tag{2.14}$$

Ésszerű feltenni, hogy U és A nemszinguláris és lokálisan analitikus függvények a jövőbeli fénykúpban, amit a szintvonalaikból képzett koordinátarendszer lefed. A gömbszimmetrikus Euler-egyenletre U segítségével egyszerű megoldásokat találhatunk, ha a $T(t,r)$ hőmérséklet és a $\mu(t,r)$ kémiai potenciál helyett bevezetjük $\mathcal{T}(U,A)$-t és $m(U,A)$-t a következő módon:

$$T = \mathcal{T}(U,A)\sqrt{\partial_\mu U\partial^\mu U}, \quad \mu = m(U,A)\sqrt{\partial_\mu U\partial^\mu U}. \tag{2.15}$$

Ha behelyettesítjük ezt, illetve s és n (2.13) alatti kifejezését az Euler-egyenlet (2.8) felírásába, a következő egyszerű feltételt kapjuk $\mathcal{T}(U,A)$-ra és $m(U,A)$-ra[5]:

$$\xi(A)\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial A} + \nu(A)\frac{\partial m}{\partial A} = 0. \tag{2.16}$$

Az s és n kifejezéseiben A deriváltjairól áttérhetünk U-éira a (2.14) pszeudoortogonalitási feltétellel. Összefoglalva az eddigieket, a (2.14) és a (2.16) feltételek erejéig tetszőleges $U(t,r)$, $A(t,r)$, illetve $\xi(A)$, $\nu(A)$, $\mathcal{T}(U,A)$ és $m(U,A)$ függvények a gömbszimmetrikus esetben az (1.12)–(1.14) egyenletek megoldását adják:

$$s = \frac{A'}{\dot{U}}\frac{\xi(A)}{r^{D-1}}\sqrt{\dot{U}^2 - U'^2}, \quad n = \frac{A'}{\dot{U}}\frac{\nu(A)}{r^{D-1}}\sqrt{\dot{U}^2 - U'^2}, \tag{2.17}$$

$$T = \mathcal{T}(U,A)\sqrt{\dot{U}^2 - U'^2}, \quad \mu = m(U,A)\sqrt{\dot{U}^2 - U'^2}, \tag{2.18}$$

$$v = -\frac{U'}{\dot{U}}, \quad \dot{U}\dot{A} - U'A' = 0, \quad \xi(A)\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial A} + \nu(A)\frac{\partial m}{\partial A} = 0. \tag{2.19}$$

Ehhez az általános megoldáshoz képest kis specializációt jelent, ha faktorizált alakot teszünk

[5] Ehhez a t és r szerinti deriválásokról át kell térni U és A szerintiekre, amit megtehetünk, hiszen U és A szintvonalai nemszinguláris koordinátarendszert alkotnak. Néhány ilyen hasznos áttérési képlet:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{U}\frac{\partial f}{\partial U} + \dot{A}\frac{\partial f}{\partial A}, \quad \frac{\partial f}{\partial r} = U'\frac{\partial f}{\partial U} + A'\frac{\partial f}{\partial A} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial U} = \frac{A'\frac{\partial f}{\partial t} - \dot{A}\frac{\partial f}{\partial r}}{\dot{U}A' - U'\dot{A}}, \quad \frac{\partial f}{\partial A} = \frac{-U'\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{U}\frac{\partial f}{\partial r}}{\dot{U}A' - U'\dot{A}},$$

ahol a második képletpárt invertálással kaphatjuk. Ebből megkaphatjuk a t és r eredeti változók U és A szerinti deriváltjait is, amiből aztán az U és az A t és r szerinti deriváltjait is meghatározhatjuk:

$$\dot{U} = \chi\frac{\partial r}{\partial A}, \quad U' = -\chi\frac{\partial t}{\partial A}, \quad \dot{A} = -\chi\frac{\partial r}{\partial U}, \quad A' = \chi\frac{\partial t}{\partial U}, \quad \text{ahol} \quad \chi \equiv \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial U}\frac{\partial r}{\partial A} - \frac{\partial t}{\partial A}\frac{\partial r}{\partial U}} = \dot{U}A' - U'\dot{A}.$$

fel $\mathcal{T}(U,A)$-ra: $\mathcal{T}(U,A) = \chi(A)\,\mathcal{T}(U)$. Ekkor (2.16)-ból kis számolással következik, hogy vagy $\nu(A) = 0$, azaz a részecskeszám eltűnik, vagy $m(U,A)$ is ilyen alakú: $m(U,A) = \chi(A)\,m(U)$. Látható, hogy a $\chi(A) = 1$ esetben a most felírt általános gömbszimmetrikus megoldás a fentebb látott relativisztikus potenciáláramlás típusú: U helyett önmaga függvényét véve a tetszőleges $\mathcal{T}(U)$ függvényt beleolvaszthatjuk U deriváltjaiba: az ilyen U-t Φ-nek nevezve valóban (2.9) alakot kapunk v-re és T-re.

A (2.17)–(2.19) alatt felírt általános összefüggések alapján valódi hidrodinamikai megoldást úgy kaphatunk, ha az állapotegyenletet is figyelembe vesszük. A következő szakaszban látjuk, hogy ez általában bonyolult feltételeket jelent az eddig még szinte szabad U és A függvényekre. Új megoldásokat nem is úgy érdemes keresni, hogy ezen feltételeket teljesen visszakövetjük a (2.17)–(2.19)-en keresztül, hanem csak a v sebességmezőt határozzuk meg, majd ez alapján közvetlenül meg tudjuk oldani a kontinuitási és az Euler-egyenleteket. A 2.2. szakaszban mutatok erre konkrét példát.

2.1.3. Az állapotegyenlet figyelembevétele

Láttunk két módszert arra, hogy hogyan egyszerűsítsük a relativisztikus hidrodinamikai egyenleteket: a Khalatnikov-tól származó módszer, a potenciáláramlás feltételezése megoldja az Euler-egyenletet, a másik módszer a saját magam által kidolgozott (2.17)–(2.19) egyenletek használata, mely gömbszimmetrikus esetben használható, és ebben az esetben a potenciáláramlás általánosítása. Mindkét esetben további feltételeket jelent az állapotegyenlet figyelembevétele. Ebben a szakaszban végig a az (1.7) állapotegyenlettel, azaz az $\varepsilon = \kappa p$ esettel foglalkozunk, konstans κ együttható esetére.

Khalatnikov gondolatmenete a (2.9) potenciáláramlásra a következő [24]: a négyessebességet és a hőmérsékletet (2.9) alapján a Φ potenciállal felírva, ha kihasználjuk az (1.7) állapotegyenlet μ és n nélkül felírt, (1.8) második egyenlete szerinti alakját, melyből $s = s_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa}$ következik, felírhatjuk su^μ kifejezését. Erre felírhatjuk a kontinuitási egyenletet:

$$su^\mu = \frac{s_0}{T_0^\kappa}\left(\partial_\nu\Phi\partial^\nu\Phi\right)^{\frac{\kappa-1}{2}}\partial^\mu\Phi, \quad \partial_\nu\left(su^\nu\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu\left\{\left(\partial_\nu\Phi\partial^\nu\Phi\right)^{\frac{\kappa-1}{2}}\partial^\mu\Phi\right\} = 0. \tag{2.20}$$

Ez utóbbi Φ-re vonatkozó egyenletet háromdimenziós jelölésbe írva kapjuk az ideális gáznak megfelelő, (1.7) állapotegyenletű potenciáláramlásra vonatkozó végső feltételt:

$$\frac{\kappa-1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2\right)\dot{\Phi} - \nabla\left(\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2\right)\nabla\Phi}{\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2} = \triangle\Phi - \ddot{\Phi}. \tag{2.21}$$

A potenciáláramlásokra vonatkozóan ezt az egyenletet először Khalatnikov alkalmazta. Ennek minden megoldása egy ideális gáz állapotegyenletű egzakt hidrodinamikai megoldást generál (2.9) alapján. (Az ebből az egyenletből kapható Landau-Khalatnikov-megoldást röviden felidézem az A.3. függelékben.)

Hasonló egyenletet vezethetünk le az (1.12)–(1.14) hidrodinamikai egyenleteknek az előző szakaszban ((2.17)-ben és (2.18)-ban) kifejtett általános gömbszimmetrikus megoldása esetére. Ez akkor lesz teljes hidrodinamikai megoldás, ha konzisztens az anyag állapotegyenletével, mely összekapcsolja T-t, μ-t, s-et és n-et. (Abból a szemszögből, ahogyan most közelítettünk az egyenletekhez, ez okozza az igazi nehézséget.) Az 1.4.1. szakaszban látottak szerint az anyag állapotegyenlete megfogalmazható pl. úgy, hogy megadjuk a $T(s,n)$ $\mu(s,n)$ függvényeket, amelyek az $\varepsilon(s,n)$ termodinamikai potenciálfüggvény deriváltjai. Ezekből, ha behelyettesítjük s, n, T és μ előző szakaszban látott kifejezéseit, erős megszorításokat kapunk az U és A függvényekre.

Nézzük először azt az esetet, amikor az n részecskeszám (és a μ kémiai potenciál) nem tűnik el[6]! Az (1.7) állapotegyenletre vonatkozó $T(s,n)$ és $\mu(s,n)$ függvényeket az (1.8) egyenletből kaphatjuk (1.4) szerint (deriválásokkal). A következő feltételekre jutunk:

$$T = \frac{E_0}{\kappa}\left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} e^{\frac{s}{\kappa n}}, \quad \frac{\mu}{T} = \kappa + 1 - \frac{s}{n}. \tag{2.22}$$

A második egyenletet az előző szakasz általános megoldásában látott, $m(U,A)$-ra és $\mathcal{T}(U,A)$-ra vonatkozó (2.19) feltétellel kombinálva, (2.17) és (2.18) behelyettesítésével arra jutunk, hogy

$$m = \left(\kappa + 1 - \frac{\xi}{\nu}\right)\mathcal{T}, \quad \xi\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial A} + \nu\frac{\partial m}{\partial A} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial A}\left(\ln \mathcal{T} - \frac{1}{\kappa+1}\frac{\xi}{\nu}\right) = 0, \tag{2.23}$$

azaz egy tetszőleges egyváltozós $\tilde{\mathcal{T}}(U)$ függvénnyel felírhatjuk a megoldást:

$$\mathcal{T}(U,A) = \tilde{\mathcal{T}}(U)\, e^{\frac{1}{\kappa+1}\frac{\xi(A)}{\nu(A)}}, \quad m(U,A) = \tilde{\mathcal{T}}(U)\, e^{\frac{1}{\kappa+1}\frac{\xi(A)}{\nu(A)}}\left(\kappa + 1 - \frac{\xi(A)}{\nu(A)}\right). \tag{2.24}$$

Ezt most visszahelyettesíthetjük (2.22) első egyenletébe. Különválasztva az U-t és A-t tartalmazó részeket azt kapjuk, hogy

$$\dot{U}\left(\dot{U}^2 - U'^2\right)^{\frac{\kappa+1}{2}} \tilde{\mathcal{T}}(U)\left(\frac{\kappa}{E_0}\right)^{\kappa} n_0 = e^{\frac{1}{\kappa+1}\frac{\xi(A)}{\nu(A)}}\frac{A'}{r^{D-1}}. \tag{2.25}$$

[6] Abban az esetben, ha $\mu = 0$, azaz $m(U,A) = 0$, a (2.19) $\mathcal{T}(U,A)$-ra vonatkozó egyenlete egyszerűen a $\mathcal{T}(U,A) = \tilde{\mathcal{T}}(U)$ feltételt adja, tehát $\mathcal{T}$ csak U-tól függő függvény. Ebben az esetben már láttuk, hogy az áramlás a (2.9) egyenletnek megfelelő potenciáláramlás; ezzel az esettel fentebb általánosan is foglalkoztunk, és nemsokára belátjuk, hogy a mostani gondolatmenetünk speciális eseteként is felfogható.

Kihasználhatjuk most, hogy — amennyiben egyelőre csak a sebességmezőre vagyunk kíváncsiak — U-t és A-t átdefiniálhatjuk önmaguk tetszőleges függvényeivé. Így ebben az egyenletben minden csak A-tól ill. minden csak U-tól függő, akár konstans részt is „beleolvaszthatunk" A és U deriváltjaiba (az így átdefiniált U-t és A-t nem jelölöm külön betűkkel). U-nak és A-nak ezután már csak a (2.19)-ben szereplő pszeudoortogonalitási feltételt kell kielégíteniük. Ez utóbbit (r szerinti deriválással) megfogalmazhatjuk A'-re vonatkozóan is. Egyenleteink tehát:

$$r^{D-1}\dot{U}\left(\dot{U}^2 - U'^2\right)^{\frac{\kappa+1}{2}} = A' \quad , \quad \dot{U}\dot{A} - U'A' = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{U}\left(\ln A'\right)^{\cdot} - U'\left(\ln A'\right)' = U'' - \frac{\dot{U}'U'}{\dot{U}}.$$

Ebből már megkapjuk a gömbszimmetrikus esetre érvényes egyenletet, aminek megoldásai mind az (1.7) állapotegyenletű relativisztikus hidrodinamikai megoldásokat adnak:

$$(\kappa - 1)\frac{\ddot{U}\dot{U}^2 + U''U'^2 - 2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2 - U'^2} = U'' + \frac{D-1}{r}U' - \ddot{U}. \tag{2.26}$$

Ez az egyenlet valóban az előzőekben Khalatnikov nyomán felírt (2.21) egyenlet gömbszimmetrikus esete. Itt ez utóbbinak egy gömbszimmetrikus esetben részletesebb, általánosabb levezetését adtam meg. Az U függvényről látható, hogy gömbszimmetrikus esetben tulajdonképpen a Φ potenciálfüggvény általánosítása. Noha U egy a potenciáláramlásra jellemző alakúhoz hasonló egyenletet, (2.26)-ot elégíti ki, ez egyáltalán nem jelenti azt, hogy minden gömbszimmetrikus áramlás egyúttal potenciáláramlás is. A gömbszimmetrikus általános esetben a (2.26) egyenlet levezetéséhez U és A megfelelő átdefiniálása kellett, és az átdefiniált U-ból a hőmérséklet általában már nem a (2.9)-ben látott egyszerű alakban, hanem a (2.18)-ban felírt általánosabb alakban fejezhető ki. A következőkben megmutatom, hogy sokféle nem potenciáláramlás típusú gömbszimmetrikus megoldás létezik. Gömbszimmetrikus esetben a bemutatott módszer tehát valóban általánosítja Landau és Khalatnikov gondolatmenetét.

Egy utolsó lényeges lépés maradt hátra, amivel mind a Khalatnikov által talált (2.21) egyenletet, mind az itt levezetett (2.26) egyenletet általánosíthatjuk, illetve a megoldásukat egyszerűbbé tehetjük. Már láttuk, hogy egy U függvény és bármilyen $\tilde{U} = f(U)$ ugyanazt a v sebességmezőt adja, ha tehát csak erre vagyunk kíváncsiak, megnézhetjük, mi a feltétele annak, hogy egy adott U-nak valamilyen $f(U)$ függvénye megoldja (2.26)-ot (vagy (2.21)-et). Ha (2.26)-ba U helyére $f(U)$-t írunk, a következő egyenletet kapjuk:

$$(\kappa - 1)\frac{\ddot{U}\dot{U}^2 + U''U'^2 - 2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2 - U'^2} + \ddot{U} - U'' - \frac{D-1}{r}U' = -\kappa\frac{\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}U^2}}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}U}}\left(\dot{U}^2 - U'^2\right). \tag{2.27}$$

Az itt megjelenő függvényt $\phi(U)$-val jelölöm: $\phi(U) = \kappa\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}U^2}/\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}U}$. Ezt az egyenletet tudtommal

korábban senki sem vezette le[7]. Ennek minden megoldása „visszafejthető”, és megoldást generál az $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenletű hidrodinamikai egyenleteknek. Úgy érdemes eljárni, hogy amikor v alakját megkaptuk, onnan az alapegyenletekhez térünk vissza, és úgy állapítjuk meg p (vagy a használt állapotegyenlet szerint vele ekvivalens T és n) kifejezéseit.

A (2.27) egyenlet egyik legegyszerűbb megoldása a következő:

$$U = t^2 - r^2, \quad \phi(U) = -\frac{D+\kappa}{U} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r}{t}, \quad A = \frac{t}{r}. \tag{2.28}$$

Ez nem más, mint a Hwa-Bjorken– illetve $D > 1$-re a Buda-Lund-típusú (Hubble-féle) megoldás, amit tehát így is megkaphatunk, és valóban bármilyen D-re és κ-ra működik, azaz megoldja (2.26)-ot. (Ha ebből az egyenletből indulunk ki, a T hőmérséklet és az n sűrűség és az s entrópiasűrűség) alakját a legkönnyebben magukból a kontinuitási egyenletekből vezethetjük le, v-nek (és A-nek) a (2.28)-ban megkapott kifejezését használva, amivel tényleg az (1.33)-ban és (1.34)-ben látható kifejezésekre jutunk.) A következő szakaszban (2.27) egy új megoldását mutatom meg, és a későbbiekben tovább vizsgálom a lehetséges általánosításokat.

2.2. Egyszerű gyorsuló új gömbszimmetrikus megoldások

Az előbb felírt (2.27) egyenletre új, az eddig ismertektől különböző megoldást találtam, mely gyorsuló tágulást leíró hidrodinamikai áramlásra vezet[8]. U és A kifejezései a következők:

$$\phi(U) = 0, \quad \kappa = D, \quad U = \frac{t}{t^2 - r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2tr}{t^2 + r^2}, \quad A = \frac{r}{t^2 - r^2}. \tag{2.29}$$

A megoldás minden D dimenzióban helyes, de csak akkor, ha $\kappa = D$, azaz az állapotegyenlet olyan, mint a „valódi” ultrarelativisztikus gázé. Tudva a sebességmezőt, könnyen megoldhatjuk a maradék kontinuitási egyenleteket. A következő megoldást kapjuk:

$$v = \frac{2tr}{t^2 + r^2}, \quad A = \frac{r}{t^2 - r^2}, \quad p = p_0 \left(\frac{\tau_0^2}{t^2 - r^2} \right)^{D\frac{1+\kappa}{\kappa}}, \tag{2.30}$$

$$n = n_0 \left(\frac{\tau_0^2}{t^2 - r^2} \right)^{D} \mathcal{V}(A), \quad T = T_0 \left(\frac{\tau_0^2}{t^2 - r^2} \right)^{D/\kappa} \frac{1}{\mathcal{V}(A)}, \quad p_0 = n_0 T_0. \tag{2.31}$$

[7] A nem feltétlenül gömbszimmetrikus (2.21) egyenlet megfelelője nyilván hasonló:

$$\frac{\kappa - 1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left(\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2\right)\dot{\Phi} - \nabla\left(\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2\right)\nabla\Phi}{\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2} - \triangle\Phi + \ddot{\Phi} = \phi(\Phi)\left(\dot{\Phi}^2 - (\nabla\Phi)^2\right).$$

[8] Az A.3 függelékben egyfajta levezetést mutatok erre a megoldásra a (2.26) és a (2.27) egyenletek alapján.

A tetszőleges $\mathcal{V}(A)$ függvény fellépte ismerős a korábban felidézett nemrelativisztikus (1.29) és a relativisztikus (1.34) megoldásokból [41, 49]. Az itt bevezetett tetszőleges $\mathcal{V}(A)$ függvény nem azonos a (2.17) egyenletben szereplő tetszőleges $\nu(A)$ függvénnyel: A (és így $\nu(A)$) megfelelő átdefiniálásával hozhatóak a (2.17) egyenletbeli kifejezések az itteni alakra. Itt a későbbiek szempontjából legkényelmesebb választással írtam fel az új megoldást.

Ne feledjük: ez a megoldás csak $D = \kappa$ esetben érvényes, mégis azért írtam ki D/κ-t 1 helyett, mert így szembeszökőek a már ismert és ezután felderített megoldásokkal közös vonások: ez a megoldás is tágulást ír le, és a termodinamikai mennyiségek változása adiabatikus jellegű.

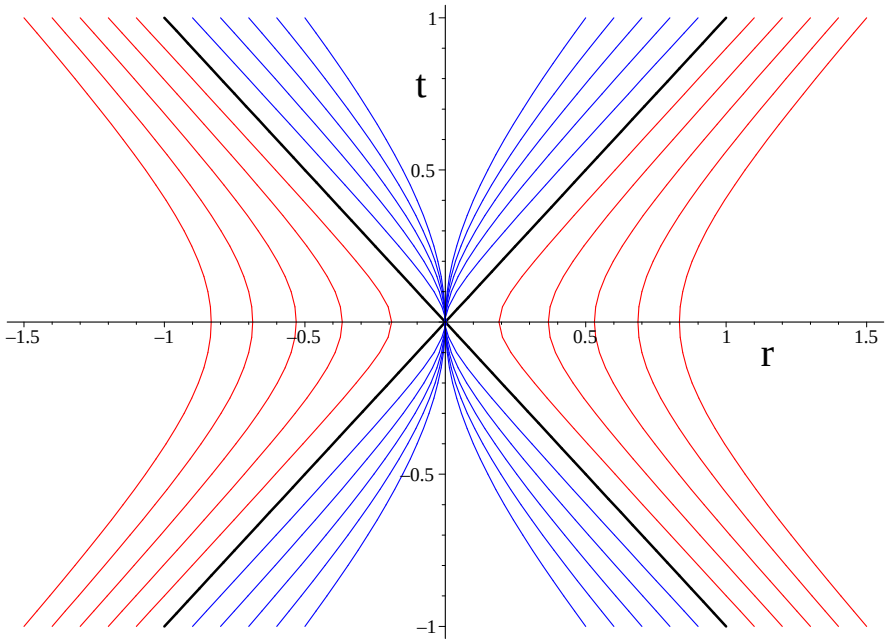
A folyadékelemek nemeltűnő gyorsulással mozognak ($u^\nu \partial_\nu u^\mu \neq 0$). Ilyen egyszerű, gyorsuló megoldás korábban nem volt ismert az irodalomban. A sebességmezőnek a t-vel és r-rel (2.30) alatt felírt alakját használva egyszerűen megoldhatjuk a folyadékelemek $r(t)$ pályáinak $\dot{r}(t) = v(t, r(t))$ mozgásegyenletét (vagy az A skálafüggvény (2.31) kifejezéséből meghatározhatjuk az $A = const$ vonalak egyenletét), így megkaphatjuk $r(t)$ kifejezését tetszőleges t_0, r_0 kezdőfeltételekre:

$$r(t) = \sqrt{\left(\frac{r_0^2 - t_0^2}{2r_0^2}\right)^2 + t^2} + \frac{r_0^2 - t_0^2}{2r_0}. \tag{2.32}$$

Ez a képlet nemnegatív r-ekre, és pozitív t_0-ra érvényes. ($D = 1$ dimenzióban az áramlás az egyetlen r helykoordinátában szimmetrikus $r \to -r$-re, $D > 1$-re pedig csak pozitív r koordinátának van értelme. Az egész megoldás szimmetrikus a $t \to -t$ cserére: negatív időkre összehúzódást ír le.) Maga a megoldás nemcsak a fénykúpon belül, hanem azon kívül is érvényes, de a két tartomány „szétválik”, a trakektóriák nem keresztezik azt. A fénykúp határesetként benne van az áramlásban, rajta $v = 1$, a $t = 0$ hiperfelületen pedig v azonosan nulla. Az áramlási képet a 2.1. ábra mutatja. A (2.32) képlet a folyadékelemek pályáit a fénykúpon belül és kívül is érvényes formában adja meg. Látható, hogy a trajektóriák relativisztikus értelemben egyenletes gyorsulást írnak le: a folyadékelemek a saját nyugalmi rendszerükben végig konstans a_0 nagyságú gyorsulással gyorsulnak, melynek értéke $a_0 = \frac{2r_0}{|r_0^2 - t_0^2|}$. A folyadékelemek laborrendszerbeli sebessége tehát 1-hez, azaz a fénysebességhez tart nagy időkre. Arra a kérdésre, hogy hogyan lehetséges állandó gyorsulás, ha közben a nyomás (és így gradiense is) biztosan csökken minden világvonal mentén, az lehet a válasz, hogy a nyomással együtt a „tömeg” szerepét játszó $\varepsilon + p$ entalpiasűrűség is vele arányosan tart nullához[9].

A 3. fejezetben teljesen más szempontok alapján újra megkapjuk ezt a megoldást, és tovább is általánosítjuk. A következő szakaszban pedig egy egyszerűbb általánosítást mutatok be.

[9] Ez az arányosság az $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenlet sajátja, de hasonló „örökké gyorsuló” viselkedés várható sokféle $\varepsilon = \kappa(T)\, p$ állapotegyenlet esetén is, ha ε nullához tart a $p \to 0$ esetben.



2.1. ábra. A (2.30) képletek által megadott, nemeltűnő gyorsulású új egzakt hidrodinamikai megoldás világvonalai.

2.3. A λ-megoldások

Az előbb látott új megoldás egy általánosítását kaphatjuk a következő módon [50, 51]. Vegyük észre, hogy a (2.30) megoldást az (1.32) egyenletben bevezetett Rindler-koordinátákkal így is fel lehet írni:

$$v = \mathrm{th}\,(2\eta)\,, \quad p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\frac{2D}{\kappa}}\,,$$

a Hwa-Bjorken-Hubble-megoldásosztály [45, 46, 49] pedig ilyen alakú (itt τ és η tényleg a folyadékelem sajátideje és rapiditása):

$$v = \mathrm{th}\,(\eta)\,, \quad p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\frac{D}{\kappa}}\,.$$

Ezek sugallják, hogy próbálkozzunk azzal, hogy a sebességmező $v = \mathrm{th}\Omega$, $\Omega = \lambda\eta$ alakú, ahol λ egyelőre határozatlan paraméter. Továbbra is (1.7), azaz $\varepsilon = \kappa p$, konstans κ-val jellemzett állapotegyenletű anyaggal foglalkozunk. A hidrodinamikai egyenleteket a 2.1.1 szakaszban átírtuk Rindler-koordinátákra, az ott bevezetett Ω és Q mennyiségeket használva; most behelyettesítjük az $\Omega = \lambda\eta$ feltételezést. A $\beta \equiv \lambda - 1$ jelöléssel az Euler– és az energiaegyenlet így alakul:

$$\mathrm{ch}\,(\beta\eta)\,\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \mathrm{sh}\,(\beta\eta)\left(\beta + 1 + \tau\frac{\partial Q}{\partial \tau}\right) = 0, \tag{2.33}$$

$$\mathrm{ch}\left(\beta\eta\right)\left(\beta+1+\kappa\tau\frac{\partial Q}{\partial\tau}\right)+\mathrm{sh}\left(\beta\eta\right)\kappa\frac{\partial Q}{\partial\eta}+\frac{D-1}{\mathrm{sh}\eta}\mathrm{sh}\left(\left(\beta+1\right)\eta\right)=0. \tag{2.34}$$

Rögtön látható, hogy ha $\beta=0$, akkor $Q=-\frac{D}{\kappa}\ln\tau$ adódik, és ezzel minden D-re és minden κ-ra megoldást kapunk. (Ez az 1.5. szakaszban látott Hwa-Bjorken-Hubble-típusú már ismert megoldás gömbszimmetrikus esete.)

Egyéb esetben (tehát amikor $\beta\neq 0$) első lépésként az első egyenletből kifejezhetjük $\frac{\partial Q}{\partial\eta}$-t, és behelyettesíthetjük a másodikba:

$$\left(\beta+1\right)\left(\mathrm{ch}^2\left(\beta\eta\right)-\kappa\mathrm{sh}^2\left(\beta\eta\right)\right)+\kappa\tau\frac{\partial Q}{\partial\tau}+\left(D-1\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\left(\beta+1\right)\eta\right)}{\mathrm{sh}\eta}\mathrm{ch}\left(\beta\eta\right)=0. \tag{2.35}$$

Ebből leszűrhetjük, hogy $\tau\frac{\partial Q}{\partial\tau}$ csak η-tól függ, azaz $Q\left(\tau,\eta\right)=H\left(\eta\right)+K\left(\eta\right)\ln\tau$ alak jöhet szóba, itt még tetszőleges $K\left(\eta\right)$ és $H\left(\eta\right)$ függvényekkel. Ezt most (2.33)-ba helyettesíthetjük:

$$\mathrm{ch}\left(\beta\eta\right)\left(H'\left(\eta\right)+K'\left(\eta\right)\ln\tau\right)+\mathrm{sh}\left(\beta\eta\right)\left(\beta+1+K\left(\eta\right)\right)=0,$$

amiből (az egyetlen τ-t tartalmazó tagból) látszik, hogy $K\left(\eta\right)=K$ konstans kell, hogy legyen, valamint $H\left(\eta\right)$-t is meghatározhatjuk. A p nyomás kifejezését is felírhatjuk:

$$H\left(\eta\right)=-\frac{K+\beta+1}{\beta}\ln\mathrm{ch}\left(\beta\eta\right)+const\ \Rightarrow\ p=p_0\left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{-K(\kappa+1)}\left(\mathrm{ch}\left(\beta\eta\right)\right)^{-\frac{K+\beta+1}{\beta}(\kappa+1)}. \tag{2.36}$$

Ez tehát megoldja (2.33)-at, végső feltételként pedig egy algebrai egyenletet kapunk β-re, mely Q most felírt kifejezésének a (2.35)-be való visszahelyettesítésével adódik:

$$\kappa K+\left(D-1\right)\frac{\mathrm{sh}\left(\left(\beta+1\right)\eta\right)}{\mathrm{sh}\eta}\mathrm{ch}\left(\beta\eta\right)+\left(\beta+1\right)\left(\mathrm{ch}^2\left(\beta\eta\right)-\kappa\mathrm{sh}^2\left(\beta\eta\right)\right)=0. \tag{2.37}$$

Ez az egyenlet erős megszorítást jelent a K, κ, D és β (azaz λ) lehetséges értékeire. Már ismerünk egy megoldást (2.37)-re: $\beta=1$-re (ez a sejtésünket megalapozó $\lambda=2$ eset) minden D-re megoldást kapunk, ha $\kappa=D$ és $K=-2$. További három egyszerű megoldást találhatunk (2.37)-re: $\beta=\pm 1/2$-nek megfelelőeket, valamint $\kappa=D=1$-re minden β megoldás[10]. A (2.37) egyenletből kideríthető, hogy mindezek a megoldások milyen κ és D értékekre működnek. A következő szakaszban elemezzük a lehetőségeket.

[10] A fentebb már vizsgált $\beta=0$ eset, a Hwa-Bjorken-Hubble-megoldás nem jön ki helyesen a (2.37) egyenletből, mivel ennek levezetése közben kihasználtuk, hogy $\beta\neq 0$.

	λ	D	κ	ϕ_λ
$a.$	2	$\in \mathbb{R}$	D	0
$b.$	$\frac{1}{2}$	$\in \mathbb{R}$	1	1
$c.$	$\frac{3}{2}$	$\in \mathbb{R}$	$\frac{4D-1}{3}$	1
$d.$	1	$\in \mathbb{R}$	$\in \mathbb{R}$	0
$e.$	$\in \mathbb{R}$	1	1	0

2.1. táblázat. A λ-megoldásoknak nevezett, a (2.38) képletekkel adott új megoldásosztály lehetséges paraméterei. Egy sorban találhatók az összetartozó értékpárok.

2.3.1. A sebességmező és a nyomás kifejezései, alaptulajdonságok

Kiderül, hogy (2.37)-nek az előző szakasz végén említett összes megoldása esetén a p nyomás (2.36) szerint lehetséges η-függése csak a $\beta = \pm 1/2$ esetben jelenik meg; végigszámolva az összes lehetőséget azt találjuk, hogy a most felderített megoldásosztályt az alábbi tömör formában foglalhatjuk össze:

$$v = \mathrm{th}\left(\lambda\eta\right), \quad p = p_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\lambda D \frac{\kappa+1}{\kappa}} \mathrm{ch}\left(\frac{\eta}{2}\right)^{-(D-1)\frac{\kappa+1}{\kappa}\Phi_\lambda}, \tag{2.38}$$

a paraméterek lehetséges értékei pedig erősen korlátozottak, a megengedett eseteket a 2.1 táblázat tartalmazza, ennek minden sora egy adott megoldáshoz (vagy megoldás-osztályhoz) tartozó értékeket jelöl. A Φ_λ paraméter értéke 1 azokra a megoldásokra, ahol p η-függő, egyébként 0. A $t > 0$ tartományban minden felírt megoldás táguló, hűlő folyadékáramlást ír le. A hőmérséklet, entrópiasűrűség, és (ha vannak) az n és μ kifejezéseit később, a 2.3.3. szakaszban írjuk fel.

Felmerül a kérdés, hogy ezek a megoldások vajon kimeríteik-e az összes lehetőséget. Arra jutunk, hogy még abban az eggyel általánosabb esetben, amikor a $v = \mathrm{th}\Omega$, $\Omega = \lambda\left(\tau\right)\eta$ feltevéssel élünk, sem találhatunk más megoldást, mint a most tárgyalt, a 2.1. táblázat és a (2.38) képletek által megadottakat (amelyek tehát konstans, τ-független λ-nak felelnek meg). Ennek bizonyítása azon alapszik, hogy a hidrodinamikai egyenletek és az előző általános feltevésünk $\eta = 0$ körüli sorfejtését vizsgáljuk. Ennek részletei az A.1. függelékben találhatók.

A most következőkben egyenként megvizsgáljuk a 2.1. táblázatban felsorolt megoldásokat:

- $a.$ eset: ez a megoldás minden D dimenziószámra (tehát 1+1, ill. 1+3 dimenziós téridőben) érvényes, megegyezik az előző szakaszban a Khalatnikov-egyenlet segítségével talált, (2.30) alatt felírt új egzakt megoldással. Az állapotegyenletre a $\kappa = D$ megkötés érvényes, ami nem más, mint az ultrarelativisztikus ideális gáz állapotegyenlete.

- $b.$ és $c.$ eset[11]: a $b.$ esetben $\lambda = \frac{1}{2}$, és noha a tér D dimenziószáma bármennyi lehet, a κ

[11] Ezeket Bíró Tamás javaslata alapján közösen dolgoztuk ki [56]. Köszönetemet fejezem ki neki ezért.

együtthatónak 1-nek kell lennie. A (2.21) és (2.26) alapján látható, hogy a $\kappa = 1$ esetben a relativisztikus hidrodinamikai egyenletek lineáris (hullám)egyenletre vezetnek, és gyakorlatilag általános formában megoldhatóak (lásd a 2.4. szakaszt is). A $\kappa = 1$ választás csak „valódi $1+1$ dimenziós" ultrarelativisztikus ideális gáz esetén felel meg a valóságnak. Mindazonáltal érdekesek az ilyen megoldások is. A *c.* esetben $\lambda = 3/2$, minden D dimenzióban létezik a megoldás, de a κ együttható a táblázatban megadott furcsa módon áll kapcsolatban D-vel: pl. $D = 3$-ra $\kappa = \frac{11}{3}$. (Ez fizikailag közelebb áll a kvark-gluon-plazma valódi állapotegyenletéhez, mint a $\kappa = 1$ választás.) A *b.* és *c.* eset közös vonása, hogy a p nyomás adott τ hipersíkon levág nagy η értékekre. Ez fontos és realisztikus tulajdonság, mert a termalizációt sokszor úgy képzelik, hogy adott $\tau = \tau_0$ sajátidő-hiperfelületen történik, a valódi fizikai helyzethez tehát közel áll, ha adott τ-ra a nyomás csak véges η tartományban különbözik számottevően nullától.

- *d.* eset: ebben az esetben $\lambda = 1$, és a megoldás minden D dimenziószámra és ettől függetlenül minden κ értékre érvényes: ez a már többször látott, $1+1$ dimenzióban Hwa-Bjorken-megoldás, $1+3$ dimenzióban pedig Hubble-típusú tágulásnak nevezett (Csörgő, Csernai, Hama és Kodama által felfedezett [49]) megoldás gömbszimmetrikus speciális esete. A gyorsulás itt nulla: $u^\nu \partial_\nu u^\mu = 0$. Ezek tehát nem új eredmények, a teljesség kedvéért említem itt meg őket.

- *e.* eset: ez az eset tetszőleges λ-ra, $\kappa = D = 1$ mellett, vagyis a teljesen egydimenziós ideális gáz áramlására érvényes új megoldás. A $\kappa = 1$ állapotegyenlet az 1 dimenzióra korlátozott mozgást végző ultrarelativisztikus részecskék ideális gázát írja le, háromdimenziós térben tehát nem fizikai. Viszont a megoldás sebességprofilja általános jellegű. A λ paraméter mintegy interpolál a korábbi esetek között: $\lambda = 1$-re gyorsulásmentes, $\lambda = 2$-re konstans gyorsulású, általános λ-ra is gyorsuló (kis t értékekre az origóból $r(t) \sim t^\lambda$ szerint induló világvonalakból álló) megoldáshoz vezet. (Emiatt λ-t „gyorsulási paraméternek" is nevezhetjük.)

2.3.2. A fénykúpon kívüli megoldások

Az előző szakaszban látott λ-megoldások némelyikét ki lehet terjeszteni a jövőirányú fénykúpon kívülre. Ezek a megoldások is (csakúgy, mint az előző szakaszban látottak) szingulárisak magán a fénykúpon[12]. Fizikai értelmük — ha a nehézion-ütközések téridőbeli képére gondolunk, ahol az ütközés a fénykúp origójában történik — nem olyan nyilvánvaló, mint a fénykúpon belüli megoldásoké, pusztán, mint az egyenletek megoldásai viszont érdekesek lehetnek.

Bevezetjük a fénykúpon kívüli Rindler-koordinátákat, $\tilde{\tau}$-t és $\tilde{\eta}$-t a következő definícióval:

$$t = \tilde{\tau}\mathrm{sh}\tilde{\eta}, \quad r = \tilde{\tau}\mathrm{ch}\tilde{\eta} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\eta} = \mathrm{Arth}\frac{t}{r}, \quad \tilde{\tau} = \sqrt{r^2 - t^2}. \tag{2.39}$$

[12] A „kiterjesztés" talán nem is helyes szó: tulajdonképpen csak az előző szakaszban látottakhoz hasonló analitikus formájú megoldásokat keresünk a fénykúpon kívül is.

(Ez a felírás $r > 0$-ra és $r < 0$-ra egyaránt érvényes, de ne feledjük, hogy r definíciója alapján $r < 0$ csak $D = 1$-re értelmes) Az A.2. függelékben részletesen végigvezetjük ezek megoldását az előzőekben látott fénykúpon belüli eset analógiájára, és belátjuk, hogy az előző szakasz λ-megoldásai közül némelyiknek megfelelő alakú megoldást valóban találunk. A lehetséges esetek párba állíthatók az előző szakaszban látott felsorolással, az alapján vesszük számba őket:

- *a.* eset: ez a megoldás minden D dimenziószámra és minden $\kappa = D$-re „kiterjeszthető" a fénykúpon kívülre, hiszen ezt a 2.2. szakaszban eleve (a fénykúpon kívül is érvényes) Minkowski-koordinátákban vezettük be. A sebességmező és a nyomás Minkowski-koordinátákban pontosan ugyanolyan alakú, mint a fénykúpon belüli megfelelője, hiszen algebrai értelemben ugyanúgy megoldása ugyanazoknak az egyenleteknek.

- *b.* és *c.* eset: ezek az esetek a fénykúpon belül látott képletekhez hasonló egyszerű formulákkal csupán $D = 1$ esetben terjeszthetőek a fénykúpon kívülre. Ilyenkor a p nyomás „végességét" biztosító levágás is eltűnik, és $\kappa = 1$ lesz érvényes mindkét esetre. Ezek speciális esetei a lentebb felírt *e.* esetnek, így nem érdemelnek külön vizsgálatot.

- *d.* eset: A $\lambda = 1$ esetről kiderül, hogy kiterjeszthető a fénykúpon kívülre; $\tilde{\tau}$ és $\tilde{\eta}$ definíciói alapján felírhatjuk ennek a megoldásnak az alakját Minkowski-koordinátákkal is:

$$v = \frac{t}{r}, \quad p = p_0 \left(\frac{\tilde{\tau}_0}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right)^{\kappa+1} \mathrm{ch}^{-(D-1)\frac{\kappa+1}{\kappa}} \tilde{\eta}. \tag{2.40}$$

Érdekes látni, hogy noha a fénykúpon belüli eset (a Hwa-Bjorken– illetve a Buda-Lund-típusú Hubble-tágulást leíró megoldás) egyszerű gyorsulásmentes áramlás volt, a most látott, fénykúpon kívül érvényes sebességmező itt is nemeltűnő gyorsulású, és a folyadékelemek világvonalai éppen a $\tilde{\tau} = const$ egyenletű hiperbolák. Ezek egyenlete

$$r(t) = \frac{1}{a_0} \left(\sqrt{1 + (a_0 t)^2} - 1 \right), \quad a_0 = \frac{r_0}{r_0^2 - t_0^2}. \tag{2.41}$$

Jellegében ez az áramlás tehát hasonló az *a.* esetben látotthoz: a trajektóriák gyorsulása itt is állandó. Ez az a_0 érték azonban láthatólag másképp függ a trajektória t_0, r_0 kezdőfeltételeitől, mint a már többször látott $\lambda = 2$ esetben. A Hwa-Bjorken-megoldás (illetve a Hubble-típusú megoldás) ilyen fénykúpon kívüli, gyorsuló „kiterjesztése" nem volt ismert korábban.

- *e.* eset: A $\kappa = D = 1$ esetre vonatkozó megoldás felírható az $r > t$ tartományra is:

$$v = \mathrm{th}\lambda\tilde{\eta}, \quad p = p_0 \left(\frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\tau}} \right)^{2\lambda}, \tag{2.42}$$

de ne feledjük, hogy $\tilde{\tau}$ és $\tilde{\eta}$ definíciója más a fénykúpon kívül, mint τ-é és η-é volt. Ebben és

az előző, d. esetben érdekes a T és s, illetve n és μ megfelelő kifejezéseit is felírni, a következő szakaszban láthatjuk ezeket a fénykúpon belüli esetekkel együtt tárgyalva.

Ide kívánkozik egy megjegyzés azokról az esetekről, amikor a trajektóriák állandó gyorsulással mozognak. Adott a_0 gyorsulásnak Planck-egységekben mérve adott hőmérséklet feleltethető meg. Az ún. Unruh-effektus [54] lényege, hogy ha egy gyorsuló megfigyelő eseményhorizontot lát (pl. a most látott $\lambda = 1$ esetben a fénykúpon kívüli gyorsuló trajektóriákhoz a fénykúp belsejéből semmilyen információ nem juthat el), akkor a gyorsuló megfigyelő az eseményhorizont felől állandó, $T_0 = \frac{a_0}{2\pi}$ hőmérsékletű „sugárzást" érzékel, csakúgy, mint a fekete lyukak eseményhorizontjának léte a Hawking-sugárzásért felelős. A nehézion-ütközések gyors termalizációjának egy lehetséges magyarázata éppen az, hogy az ilyenkor fellépő nagy gyorsulás (melynek értéke a QCD ún. szaturációs skálájából megbecsülhetően kb. 1 GeV-nek felel meg Planck-egységekben) termikus Unruh-sugárzást okoz, és ez állítja be a kezdeti hőmérsékletet [55]. Az olyan típusú hidrodinamikai megoldások tehát, ahol állandó gyorsulással mozgó trajektóriák vannak, leírhatják azt a folyási képet, ami egy ilyen folyamat alapfeltételezése.

2.3.3. A hőmérséklet és a kontinuitási egyenletek

A most látott p nyomás– és v sebességmezők megoldják az Euler– és az energiamegmaradási egyenleteket. Láttuk, hogy (speciálisan az $\varepsilon = \kappa p$, $\kappa = const$ állapotegyenletre jellemző módon) a kontinuitási egyenletet ezektől külön tárgyalhatjuk.

A kontinuitási egyenletek megoldásához meghatározzuk a λ-megoldásokhoz tartozó A skálafüggvényeket, azaz amelyekre $\dot{A} + vA' = 0$. (Ez kétféleképpen is megtehető: kereshetünk a (2.26) egyenlet megoldásaként kapott U függvény szintvonalaira pszeudoortogonális koordinátákat, amik A szintvonalai lesznek, vagy a folyadékelemek mozgásegyenletét az adott $v(t,r)$ profilra megoldva A-t a trajektóriákat megkülönböztető integrációs konstansként kapjuk.)

Az A kifejezése különbözik $t < r$ és $t > r$ esetére (tehát a fénykúpon belül és kívül), és speciális esetként megjelenik a $\lambda = 1$ eset, tehát a Hwa-Bjorken– vagy Buda-Lund-megoldás. Itt is a Rindler–, illetve a megfelelő $\tilde{\tau}$, $\tilde{\eta}$ koordinátákat használjuk. A $t > r$ esetben A kifejezése:

$$A(\tau,\eta) = \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{\lambda-1} \mathrm{sh}\left((\lambda-1)\eta\right), \quad \text{ha} \quad \lambda \neq 1, \quad \text{ill.} \quad A(\tau,\eta) = \eta, \quad \text{ha} \quad \lambda = 1, \tag{2.43}$$

a $t < r$ esetre pedig azt kapjuk, hogy

$$A(\tilde{\tau},\tilde{\eta}) = \left(\frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\tau}}\right)^{\lambda-1} \mathrm{ch}\left((\lambda-1)\tilde{\eta}\right), \quad \text{ha} \quad \lambda \neq 1, \quad \text{ill.} \quad A(\tilde{\tau},\tilde{\eta}) = \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\tau}}, \quad \text{ha} \quad \lambda = 1. \tag{2.44}$$

Ezekkel felírhatjuk a kontinuitási egyenletek megoldását. (Legegyszerűbben akkor járunk el,

ha a (2.11) egyenlet alapján kifejezzük $\nabla\mathbf{v}$-t A-val.)

Ha egyáltalán nincsen megmaradó töltés, akkor $\varepsilon + p = Ts$, azaz $Ts = (\kappa+1)\,p$, és leellenőrizhető, hogy az entrópiamegmaradási egyenletből azt kapjuk, hogy T és s ilyen alakú:

$$s = s_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \nu_\sigma(A)\,, \quad T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}} \frac{1}{\nu_\sigma(A)}, \tag{2.45}$$

ahol $T_0 s_0 = (\kappa+1)\,p_0$, p kifejezését (2.38)-ban írtuk fel (illetve a 2.3.2. szakaszban a fénykúpon kívüli eseteket), $\nu_\sigma(A)$ pedig tetszőleges függvény. Ezt a közelítést, azaz, hogy minden megmaradó részecskeszám ill. töltés (pl. a bariontöltés is) eltűnik, használják mind a nagyenergiás nehézionreakciók, mind a korai Univerzum kvark-hadron fázisátmenetének leírására[13].

Ha egy n megmaradó részecskeszám van, és $p = nT$ teljesül, hasonlóan írhatjuk fel a kontinuitási egyenlet megoldását (a megjelenő tetszőleges függvényt most $\nu_n(A)$-val jelölve):

$$n = n_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \nu_n(A)\,, \quad T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}} \frac{1}{\nu_n(A)}, \quad p_0 = n_0 T_0. \tag{2.46}$$

Végül az az eset, amikor többféle n_i részecskeszám (töltés) is van, és a termodinamikai összefüggésünk (1.5) alapján $(\kappa+1)\,p = Ts + \sum_i \mu_i n_i$ alakú, teljesen hasonlóan oldható meg[14]:

$$s = s_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \nu_\sigma(A)\,, \quad T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}} \frac{1}{\nu_\sigma(A)},$$

$$n_i = n_0^{(i)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa+1}} \nu_i(A)\,, \quad \mu_i = \mu_0^{(i)} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa+1}} \frac{1}{\nu_i(A)}, \tag{2.47}$$

és persze $(\kappa+1)\,p_0 = T_0 s_0 + \sum_i n_0^{(i)} \mu_0^{(i)}$. Érdemes megfigyelni, hogy itt is, mint eddig mindenhol, ahol megjelent, az A függvény megválasztásában lévő önkényesség nem lényeges: az A tetszőleges függvényei mindenhol átdefiniálhatók, ha A helyett $f(A)$-t veszünk. (Érdemes lehet feltételként kiróni ezekre a függvényekre, hogy $\mu(0) = 1$, ekkor a n_0, T_0, stb. jelentései a T, n, stb. mennyiségek $A = 0$-ban felvett értékei. Ez pl. az n_0 esetében alapvetően semmilyen

[13] Ez a közelítés akkor jogos, ha egységnyi bariontöltésre a protontömegnél jóval nagyobb energia jut: ez pl. igaz a mai RHIC– és LHC-kísérleteknél.

[14] Az itt leírt képletek a mindenütt használt $\varepsilon = \kappa p$ feltétellel konzisztensen oldják meg a kontinuitási egyenleteket. Több n_i részecseszám esetén azonban az állapotegyenletet a $\varepsilon = \kappa p$ és a $(\kappa+1)\,p = Ts + \sum_i \mu_i n_i$ feltételek még nem határozzák meg teljesen: az $\varepsilon(s, n_i)$ függvény alakjára az $\varepsilon = \kappa p$ mindössze egy darab „valódi" feltételt jelent. Minden n_i bevezetése két új ismeretlen mennyiséget (n_i-t és μ_i-t) jelent, de csak egy új egyenletet (az n_i-re vonatkozó kontinuitási egyenletet. Több megmaradó n_i esetén tehát nyilvánvalóan lehetséges $\varepsilon(s, n_i)$-re olyan további specializációkat előírni, amelyekkel a leírt (2.47) képletek már nem feltétlenül lehetnek konzisztensek. Egy n esetén azonban, mint az (1.8) egyenletben láttuk, a $p = nT$ feltétel teljesen rögzíti az állapotegyenletet (azaz az $\varepsilon(s, n)$ potenciálfüggvényt), és a (2.46) kifejezések konzisztensek is vele.

kapcsolatban nem áll az áramlás teljes részecske– vagy töltés-számával.)

Ezzel befejeztük a λ-megoldások tárgyalását, a 4. fejezetben térünk vissza rájuk, ahol a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ rapiditáseloszlást számítjuk ki a $\kappa = D = 1$ megoldásból, és az eredményt az energiasűrűség becslésében alkalmazzuk.

2.4. Általános megoldás $\kappa = 1$-re

Külön említést érdemel a „szuperkemény" állapotegyenlet extrém esete, azaz amikor $c_s^2 = 1$. Ez talán túlzott egyszerűsítésnek tűnik, de fontosnak tartom tárgyalni, egyrészt mert nem tették meg korábban, másrészt mert hasznos lehet, nemcsak numerikus kódok ellenőrzésére, hanem egyszerű hidrodinamikai parametrizációkra és a nehézionfizikai folyási kép közelítő leírására is.

Amikor $\kappa = 1$, a (2.21) egyenlet hullámegyenletté redukálódik, azaz látszik, hogy egyszerűen megoldható lesz a probléma. Itt most részletesen megvizsgáljuk az egydimenziós ($D = 1$) esetet[15]. Ekkor az U-ra vonatkozó egyenlet helyett érdemes visszatérni az alapegyenletekre. Az Euler-egyenlet és az energiaegyenlet $D = 1$-re, $\varepsilon = p$-t behelyettesítve így alakul:

$$\frac{\dot{v} + vv'}{1 - v^2} = -\frac{1}{2p}\left(p' + v\dot{p}\right), \quad \frac{v' + v\dot{v}}{1 - v^2} = -\frac{1}{2p}\left(\dot{p} + vp'\right), \tag{2.48}$$

amiből kis átalakítással, és szokás szerint bevezetve az Ω rapiditást ($v = \mathrm{th}\Omega$) és a Q mennyiséget (amely most, a $\kappa = 1$ esetben $\frac{1}{2}\ln(p/p_0)$-lal egyenlő), egyszerűen azt kapjuk, hogy

$$\Omega' = -\dot{Q}, \quad \dot{\Omega} = -Q'. \tag{2.49}$$

Látszik, hogy Ω és Q rögtön felírható két haladó hullám összegeként. Tehát $1+1$ dimenzióban $\kappa = 1$-re a hidrodinamikai egyenletek általános megoldását is fel lehet írni, ha bevezetjük az $x^+ \equiv t + r$, $x^- \equiv t - r$ fényszerű koordinátákat:

$$\Omega(t, r) = G\left(x^-\right) + F\left(x^+\right), \quad Q(t, r) = G\left(x^-\right) - F\left(x^+\right), \tag{2.50}$$

tetszőleges F és G függvényekkel. Ha bevezetjük ezek helyett az $f \equiv e^{-2F}$, $g \equiv e^{2G}$ függvényeket, illetve ezek primitív függvényeit a $\tilde{f} = \int f$, $\tilde{g} = \int g$ definíciókkal, az A skálafüggvény is

[15] A többdimenziós, nem feltétlenül gömbszimmetrikus, de továbbra is $\kappa = 1$, azaz $\varepsilon = p$ állapotegyenletű esettel, mely szintén egyszerűen tárgyalható a (2.21)-ből adódó hullámegyenlet megoldásai alapján, a mi [50] cikkünkkel lényegében egyidejűleg megjelent [57] foglalkozik. Ugyanebben a cikkben a fordított kérdést is vizsgálják: adott egyszerű, ilyen hullámegyenletből kapható sebességmezőhöz és nyomáshoz keresnek alkalmas állapotegyenletet, amelyre megoldást ad a feltételezés.

rögtön megkapható, amiből kiadódik a teljes megoldás (a kontinuitási egyenletekre is):

$$v = \frac{g\left(x^-\right) - f\left(x^+\right)}{g\left(x^-\right) + f\left(x^+\right)}, \quad \dot{A} + vA' = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \tilde{g}\left(x^-\right) - \tilde{f}\left(x^+\right), \tag{2.51}$$

$$p = p_0 f\left(x^+\right) g\left(x^-\right), \quad n = n_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/2} \nu\left(A\right), \quad T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/2} \frac{1}{\nu\left(A\right)}. \tag{2.52}$$

Ahogy el is várjuk, ezen általános megoldás speciális eseteként valóban kiadódik az előző szakaszokban látott $\kappa = D = 1$-re vonatkozó, tetszőleges λ-val jellemzett megoldás (a 2.3.1. és 2.3.2. szakaszokban látott *e.* eset), ha F-et és G-t a következőképp választjuk:

$$F\left(x^+\right) = \frac{\lambda}{2} \ln\left(\frac{x^+}{\tau_0 p_0^{-1/2\lambda}}\right), \quad G\left(x^-\right) = -\frac{\lambda}{2} \ln\left(\frac{x^-}{\tau_0 p_0^{-1/2\lambda}}\right). \tag{2.53}$$

A megoldást általános kezdőfeltételhez akkor határozhatjuk meg, ha ez egy tetszőleges $t_0\left(r\right)$ térszerű Cauchy-felületen adott, az $\Omega_0\left(t\left(r\right), r\right)$ és $Q_0\left(t\left(r\right), r\right)$ (egyváltozós) függvényekkel. Ekkor bevezethetjük a $t_0\left(r\right)$-nek megfelelő $x_0^{\pm}\left(r\right) = t_0\left(r\right) \pm r$ fényszerű koordinátákat, és, mivel $t_0\left(r\right)$ térszerű felület, invertálhatjuk ezeket a relációkat: léteznek $r = r^+\left(x^+\right)$, illetve $r = r^-\left(x^-\right)$ függvények, amelyek a kezdőfelületet adják meg[16]. Az $x^{\pm}$ függvényében megadott kezdőfeltételekre a tömör $r_0^{\pm} \equiv r^{\pm}\left(x^{\pm}\right)$, $t^{\pm} \equiv t_0\left(r_0^{\pm}\right)$ jelöléseket használva, a megoldás:

$$\Omega\left(t, r\right) = \frac{1}{2}\left[\Omega_0\left(t_0^+, r^+\right) + \Omega_0\left(t_0^-, r^-\right) + Q_0\left(t_0^+, r^+\right) - Q_0\left(t_0^-, r^-\right)\right], \tag{2.54}$$

$$Q\left(t, r\right) = \frac{1}{2}\left[-\Omega_0\left(t_0^+, r^+\right) + \Omega_0\left(t_0^-, r^-\right) - Q_0\left(t_0^+, r^+\right) - Q_0\left(t_0^-, r^-\right)\right]. \tag{2.55}$$

Megjegyezzük, hogy a tárgyalásból nyilvánvalóan látszik, hogy Ω-ra és Q-ra vonatkozóan ez a megoldás az alábbi értelemben *stabil*: a kezdőfeltételek kis perturbációi is hullámszerűen szétterjednek az $r \to \pm\infty$ irányokba, de az áramlási kép lényegesen nem módosul. Érdekes ezt összevetni azzal, hogy a korábban ismert Landau-Khalatnikov-megoldás numerikusan vizsgálva instabilnak bizonyul a kezdőfeltételek kis perturbációira. A most látott stabilitási tulajdonság tehát lényeges újdonság, és emiatt az ebben a szakaszban látott általános megoldás várhatóan különösen jól használható lesz a numerikus hidrodinamikai kódok tesztelésére.

[16] Pl. ha a kezdeti feltétel egy $\tau = \tau_0 = const$ felületen van adva, akkor $x^{\pm} = t_0\left(r\right) \pm r = \sqrt{\tau_0^2 + r^2} \pm r$. Ezek valóban invertálhatóak, és azt kapjuk, hogy $r^+\left(x^+\right) = \frac{x^+}{2} - \frac{\tau_0^2}{2x^+}$, és $r^-\left(x^-\right) = -\frac{x^+}{2} + \frac{\tau_0^2}{2x^-}$.

3. fejezet

Egzakt megoldások és a kinetikus elmélet

Az 1. fejezetben láttunk régóta ismert egzakt hidrodinamikai megoldásokat (1.5. szakasz), a 2. fejezetben pedig bemutattam egy saját eredményemet, egzakt és explicit gyorsuló megoldások egy oszályát. Noha ez tartalmaz szabad paramétereket és függvényeket is, messze nem mondható „általánosnak", hiszen gömbszimmetrikus, speciális sebességprofilú áramlás. Az előző fejezet (2.26) és (2.21) egyenletei alapján egyelőre nem sikerült további lényegesen új egyszerű megoldásokat találnom. Egy meglepő kerülővel azonban a bemutatott megoldások érdekes általánosításaihoz juthatunk. Ez a gondolat ennek a fejezetnek a tárgya; lényege, hogy megvizsgáljuk az áramlásban résztvevő egyedi részecskék kinetikai egyenletét, azaz az eloszlásfüggvény fázistérbeli időfejlődését. Ez a probléma önmagában is érdekes, de az igazi eredmény talán az, hogy sok új egzakt (és korábban nem ismert típusú, pl. forgó) hidrodinamikai megoldást is találunk eközben. Dolgozatom e fejezete (a megfelelő tézisekkel együtt) az [58] publikációmon alapul, azonban tartalmaz egy azon túlmutató, új nemrelativisztikus forgó megoldást is.

3.1. A problémakör felvetése

A hidrodinamika makroszkopikus elmélet, egyenletei levezethetők a mikroszkopikus, az egyedi részecskék történetét statisztikus alapon nyomon követő kinetikai egyenlet megfelelő átlagolásával. Az az alapvető kép van emögött, hogy egy áramló folyadékban (vagy gázban) az egyedi részecskék sorozatos ütközései lokális termikus egyensúlyt hoznak létre és tartanak fenn[1].

Az 1.5. szakaszban bemutatott nemrelativisztikus hidrodinamikai megoldások egyike, az 1.5.2. szakaszban külön kiemelt, gömbszimmetrikus önhasonló tágulást leíró, helyfüggetlen hőmér-

[1] Ebben a fejezetben ezt a kérdéskört járjuk körül, ezért itt végig úgy gondolunk a vizsgált folyadékmozgásra, mint amelyben valódi (megmaradó számú) részecskék vesznek részt; tehát mindenhol használjuk az n mennyiséget. A kapott egzakt hidrodinamikai megoldások mindazonáltal használhatjuk úgy is a nehézionfizikai alkalmazásokban, ha elfeledkezünk n-ről, és csak p, T és $\mathbf{v}$ vagy u^μ kifejezéseit tekintjük.

sékletű és Gauss-alakú sűrűségprofilú megoldás egy meglepő tulajdonsággal bír [43]. Ennek lényege, hogy ha meghatározzuk az erre a megoldásra vonatkozó (lokális termikus) fázistérbeli eloszlásfüggvényt, akkor kiderül, hogy ennek időfejlődése olyan, mint amit akkor kapnánk, ha egy adott kezdeti időpillanatban fennálló ilyen eloszlásfüggvénynek az ütközésmentes, csupán a részecskék egyenesvonalú egyenletes mozgásából származó időfejlődését látnánk! Ez a speciális egzakt megoldás különleges abból a szempontból, hogy itt a lokálisan egyensúlyi eloszlásfüggvény fennmaradása lehetséges az ütközések szerepének teljes elhanyagolásával is.

Ebben a fejezetben ilyen típusú áramlásokat vizsgálunk. Az ilyenfajta hidrodinamikai megoldásokat — azaz a t idő és az $\mathbf{r}$ koordináta adott $\mathbf{v}$, p, T stb. függvényeit — ebben az összefüggésben *ütközésmentes* vagy *effektíve ütközésmentes* áramlásoknak vagy megoldásoknak fogom hívni. Pontosan megfogalmazva: ezek olyan áramlások, amelyek egyszerre megoldásai a hidrodinamikai egyenleteknek, ugyanakkor a nekik megfelelő fázistérbeli eloszlásfüggvény úgy fejlődik az időben, mintha nem is lennének ütközések. Ilyen áramlások esetében tehát egy adott t_0 időpillanatban *lehetséges* olyan mikroszkopikus kezdeti feltételt előállítani, amely lokálisan termikus eloszlás, azaz léteznek neki megfelelő $\mathbf{v}(t_0, \mathbf{r})$, $T(t_0, \mathbf{r})$, stb. mezők, és az ebből a kezdeti feltételből indított egyedi mikroszkopikus részecskék ütközésmentes, szabad mozgása rendre olyan mikroszkopikus állapotokat hoz létre, amelyek megint egy (általában az előző függvényektől különböző pillanatnyi $\mathbf{v}(t_1, \mathbf{r})$, $T(t_1, \mathbf{r})$ mezőknek megfelelő) lokális termikus eloszlással írhatók le. Nem arról van szó tehát, hogy az ilyen hidrodinamikai megoldások időfejlődése során biztosan nem történnek mikroszkopikus ütközések; emiatt talán félrevezető lehet az „ütközésmentes” jelző, de a most tisztázott értelemben mégis használni fogjuk.

Ez a jelenségkör a kinetikus gázelmélet fogalmaival vizsgálható. Ebben a fejezetben először felidézem a kinetikus gázelmélet néhány alapvető összefüggését, valamint a hidrodinamikával való kapcsolatát, majd (az eredeti [43] munkától eltérő tárgyalásban) összefoglalom, ami ismert volt az „ütközésmentesség” kérdésköréről nemrelativisztikus esetben [43]: bemutatom, hogy van olyan nemtriviális hidrodinamikai megoldás, amely teljesíti ezt a feltételt. Ezután bemutatom, hogy hogyan lehet további ilyen típusú megoldásokat keresni a kinetikai egyenlet és a hidrodinamikai egyenletek szimultán vizsgálatával. Mind relativisztikus, mind nemrelativisztikus esetben felderítjük az ilyen tulajdonságú, azaz effektíve ütközésmentes áramlásokat, és eközben újfajta, korábban nem vizsgált kinematikájú (pl. forgó) hidrodinamikai megoldásokat is találunk.

3.2. A kinetikus egyenlet és a hidrodinamikai mennyiségek

A kinetikus gázelmélet alapmennyisége az f fázistérbeli eloszlásfüggvény, amely (struktúrálatlan mikrorészecskék esetén) az $\mathbf{r}$ helykoordinátától és a $\mathbf{p}$ impulzustól, valamint az időtől

függ. Nemrelativisztikus esetben $f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)$ módon, relativisztikusan pedig $f(x^\mu,p^\mu)$ módon jelöljük a változóitól való függést. Fizikai jelentése: $f\,\mathrm{d}^D\mathbf{p}\mathrm{d}^D\mathbf{r}$ megadja az $\mathbf{r}$ koordináta és $\mathbf{p}$ impulzus körüli $\mathrm{d}^D\mathbf{p}\mathrm{d}^D\mathbf{r}$ elemi fázistérfogatban lévő részecskék várható számát.

Vizsgáljuk meg mind a nemrelativisztikus, mind a relativisztikus esetet! Nemrelativisztikus esetben az f segítségével definiálható egy makroszkopikus $n(\mathbf{r},t)$ részecskeszámsűrűség, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ folyási sebesség és $\varepsilon(\mathbf{r},t)$ (belső)energiasűrűség a következő módon:

$$n(\mathbf{r},t)=\int \mathrm{d}^D\mathbf{p}\,f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,,\quad \mathbf{v}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{n(\mathbf{r},t)}\int \mathrm{d}^D\mathbf{p}\,\frac{\mathbf{p}}{m_0}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon(\mathbf{r},t)=\int \mathrm{d}^D\mathbf{p}\,\frac{p^2}{2m_0}f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)-\frac{m_0 n(\mathbf{r},t)}{2}v^2(\mathbf{r},t)\,, \tag{3.2}$$

ahol, mint eddig is, m_0 egy részecske tömege. Ez a megfelelő hidrodinamikai mennyiségek mikroszkopikus definíciója.

A többi, termodinamikai megfontolásokat is igénylő hidrodinamikai alapmennyiség (mint T, μ) kinetikus elméletbeli megalapozásához szükség van valamilyen feltevésre az eloszlásfüggvényt illetően. A hidrodinamika alkalmazhatóságának feltétele a lokális termikus eloszlás. Általános anyagra (pl. folyadékokra) ez a követelmény még nem rögzíti az eloszlást, a kinetikus gázelméletben viszont a lokális termikus eloszlást egy pontról pontra változó paraméterű Maxwell-Boltzmann-eloszlással (MB-eloszlásssal) definiáljuk (ha a kvantumstatisztikus hatások elhanyagolhatóak). Nemrelativisztikus esetben tehát egy $n(\mathbf{r},t)$, $T(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ mezőkkel jellemzett, D dimenziós folyási képben a lokális termikus (MB–) eloszlás a következő alakú:

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\frac{n(\mathbf{r},t)}{(2\pi m_0 T(\mathbf{r},t))^{D/2}}\exp\left\{-\frac{(\mathbf{p}-m_0\mathbf{v}(\mathbf{r},t))^2}{2m_0T(\mathbf{r},t)}\right\}=\frac{g}{(2\pi\hbar)^D}B(\mathbf{r},\mathbf{p},t)\,, \tag{3.3}$$

$$B(\mathbf{r},\mathbf{p},t)=\exp\left\{\frac{\mu(\mathbf{r},t)}{T(\mathbf{r},t)}-\frac{(\mathbf{p}-m_0\mathbf{v}(\mathbf{r},t))^2}{2m_0T(\mathbf{r},t)}\right\}, \tag{3.4}$$

ahol bevezettük a B jelölést a Boltzmann-eloszlásra, továbbá g a részecskék spin-degenerációja ($g=2s+1$, ahol s a spin). Ez a felírás szabad részecskék gázára vonatkozik. A (3.3) és a (3.4) képletek felfoghatók úgy mint $T(\mathbf{r},t)$, $\mu(\mathbf{r},t)$, $n(\mathbf{r},t)$ és $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ kinetikus elméletbeli definíciói, és fordítva is: ha adottak egy hidrodinamikai áramlási profilnak megfelelő T, n, $\mathbf{v}$, stb. függvények, akkor ezt az eloszlásfüggvényt követeljük meg.

Az eloszlásfüggvénynek kétféle alakját is megadtuk. A nehézionfizikai irodalomban sokszor a második formát használják, míg az első az, ami rögtön láthatóan teljesíti a normálási feltételt, azaz, hogy belőle $n(\mathbf{r},t)$-t a (3.1) egyenlet alapján lehessen megkapni[2]. Belátható, hogy

[2] Már említettem, hogy a mai nehézionfizikai alkalmazásokban a megmaradó részecskeszám koncepciója

ez a két felírás akkor ekvivalens (és ekkor (3.4) a lokális egyensúlyi eloszlásra vett $\mu(\mathbf{r}, t)$ kémiai potenciál definíciójának is felfogható), ha az anyag állapotegyenlete (amely megadja μ, T, n kapcsolatát) valóban az 1.4.1. szakaszban felidézett, ideális gáznak megfelelő (1.7) állapotegyenlet, a nemrelativisztikus gáznak megfelelő $\kappa = D/2$ választással. A $\hbar$ kvantumállandót is tartalmazó tényezőhöz a következő megjegyzés tartozik: a klasszikus statisztikus fizikában az entrópia, és így a kémiai potenciál nullpontja nem meghatározott. Ha a statisztikus fizikai állapotösszeget a valódi kvantumállapotok szerint számoljuk ki akkor az $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenletnek megfelelő termodinamikai potenciálfüggvények kifejezésében, az (1.8)-ban szereplő E_0 és n_0 állandók határozott értéket nyernek, és ez fixálja s nullpontját, így μ-ét is. Ilyen számítással a statisztikus fizikában ismert módon tényleg kijön a $\frac{g}{(2\pi\hbar)^D}$ tényező.

Relativisztikus esetben is bevezethetjük a makroszkopikus mennyiségek definícióit f alapján. Az nu^μ részecske-négyesáramsűrűséget és a $T^{\mu\nu}$ energia-impulzus-tenzort a következő módon fejezhetjük ki[3]:

$$n(x)\, u^\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{p}}{p^0} p^\mu f(x,p)\,, \quad T^{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{p}}{p^0} p^\mu p^\nu f(x,p)\,. \tag{3.5}$$

A relativisztikus esetben így írható a lokális termikus egyensúlyra vonatkozó eloszlásfüggvény:

$$f(x^\mu, p^\mu) = \frac{g}{(2\pi\hbar)^D} B(x^\mu, p^\mu)\,, \quad B(x^\mu, p^\mu) = \exp\left\{\frac{\mu(x)}{T(x)} - \frac{p^\mu u_\mu(x)}{T(x)}\right\}. \tag{3.6}$$

Itt B ismét a Boltzmann-eloszlást jelöli. Erre a felírásra ugyanazok vonatkoznak, mint a nemrelativisztikus esetre. Most is meg kell jegyeznünk, hogy ez a felírás egy nem kölcsönható részecskékből álló ideális gázra vonatkozik, és épp ezért $n(x)$ (3.5) alapján való kiszámításával akkor kapjuk ténylegesen a hidrodinamikai $n(x)$ függvényt, ha az anyag állapotegyenletére ideális gáz állapotegyenletet teszünk fel. Ez az állapotegyenlet, mint láttuk, nem ugyanaz nulla tömegű (ultrarelativisztikus) esetben, mint tömeges esetben: nulla tömegű részecskékre érvényes a szokásos $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenlet $\kappa = D$ választással, tömeges esetben pedig az 1. fejezet 8. lábjegyzetében láthatjuk a lehetséges választást.

Felírjuk az f eloszlásfüggvény időfejlődésére vonatkozó ún. *kinetikai egyenletet* vagy *Boltzmann-egyenletet*. A legegyszerűbb esetben, amikor azt tesszük fel, hogy a mikroszkopikus részecskék egyáltalán nem ütköznek egymással, azaz minden részecske egyenes vonalú egyenletes mozgást

sokszor nem lényeges: a nettó barionszám elhagyható az egyenletekből, a kémiai potenciál pedig nullának vehető a hidrodinamikai evolúció során. (Például a RHIC adatainak elemzése $\mu_B/T \simeq 0,15$ körüli értéket ad, lásd pl. [59]). Az ebben a fejezetben tárgyalt módszer akkor is hasznos, ha csak az így kapható új egzakt megoldásokra gondolunk, amelyek e speciális tulajdonság (ütközésmentesség) nélkül is használhatók.

[3] Ezen képletek értelmezéséhez felidézzük, hogy az impulzustérbeli Lorentz-invariáns integrálási mérték $\frac{\mathrm{d}^D\mathbf{p}}{p^0}$, hiszen tömeghéjon lévő részecskéket vizsgálunk, melyekre $p_\mu p^\mu = m^2$.

végez, a Boltzmann-egyenlet alakja nemrelativisztikus esetben

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0. \tag{3.7}$$

Ez azt fejezi ki, hogy a fázistérbeli eloszlás csupán a részecskék ($\mathbf{p}$ impulzus esetén $\frac{\mathbf{p}}{m_0}$ sebességű) helyváltoztatása miatt változik. Valóban, ennek az egyenletnek a formális megoldása

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0\left(\mathbf{r} - (t - t_0)\frac{\mathbf{p}}{m_0}, \mathbf{p}, t_0\right) \tag{3.8}$$

alakú, a t_0 időillanatban adott tetszőleges $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0)$ kezdeti eloszlásra. Relativisztikus esetben is egyszerűen felírható az ütközésmentes Boltzmann-egyenlet és formális megoldása[4]:

$$p^\mu \partial_\mu f(x, p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0\left(\mathbf{r} - (t - t_0)\frac{\mathbf{p}}{p_0}, \mathbf{p}, t_0\right) \tag{3.9}$$

Az ütközések figyelembevételevel a Boltzmann-egyenlet sokkal bonyolultabb: megjelenik benne az ún. *ütközési integrál*, (jelölése: $\mathrm{St}f$), ami f-nek a mikroszkopikus hatáskeresztmetszetektől függő funkcionálja. Ez írja le f-nek az ütközések miatti megváltozását:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathrm{St}f, \quad \text{ill.} \quad p^\mu \partial_\mu f(x, p) = \mathrm{St}f. \tag{3.10}$$

Az $\mathrm{St}f$ konkrét alakjára nem lesz szükségünk, de fontos felidéznünk azt a tulajdonságát, hogy az impulzus szerinti momentumai eltűnnek (ld. pl. [60]). Nemrelativisztikus esetben igaz, hogy

$$\int \mathrm{d}^D\mathbf{p}\, \mathrm{St}f = 0, \quad \int \mathrm{d}^D\mathbf{p}\, \{p_k \mathrm{St}f\} = 0, \quad \int \mathrm{d}^D\mathbf{p}\, \{p^2\, \mathrm{St}f\} = 0. \tag{3.11}$$

Ebből már egyszerűen következik az a fontos eredmény, hogy ha megköveteljük a (3.10) kinetikai egyenlet teljesülését a (3.4)-ben (illetve relativisztikus esetben a (3.6)-ban) felírt lokális termikus egyensúlyi eloszlásra, akkor az n, T, $\mathbf{v}$, stb. makroszkopikus mennyiségekre éppen a megfelelő hidrodinamikai egyenleteknek kell teljesülniük[5] Látható tehát, hogy a makroszkopikus egyenletek valóban a mikroszkopikus elméletből származnak.

Relativisztikus esetben (3.11) megfelelői a következők:

$$\int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{p}}{p^0} \mathrm{St}f = 0, \quad \int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{p}}{p^0} p^\mu \mathrm{St}f = 0, \quad \int \frac{\mathrm{d}^D\mathbf{p}}{p^0} E(p^\mu)\, \mathrm{St}f = 0, \tag{3.12}$$

[4] A részecskék négyessebessége p^μ/m_0, ebből belátható, hogy (3.9) valóban a (3.7) egyenlet relativisztikus megfelelője.

[5] Ennek ellenőrzéséhez egyszerűen a (3.10) kinetikai egyenlet két oldalának kell venni a $\mathbf{p}$ szerinti nulladik, első és második momentumait, a (3.11) egyenletben használt értelemben.

ahol $E(p)$ a p^μ impulzusú részecske energiája. Ez alapján, felidézve a (3.5) definíciókat, a (3.10) egyenlet megfelelő momentumait véve rögtön adódnak a $\partial_\mu (nu^\mu) = 0$ és a $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ hidrodinamikai egyenletek (ahogyan az 1.4.2. szakaszban bevezettük őket).

Megállapíthatjuk tehát, hogy a folyadék „tökéletes" volta a lokális termikus egyensúly feltételén nyugszik[6]. Azt gondoljuk, hogy ez akkor maradhat fenn, azaz akkor alakulhat ki az időfejlődés során mindig elég gyorsan, ha a részecskék szabad úthossza kicsi, épp ezért hívják ezt hidrodinamikai limitnek. Ezért meglepő a bevezetésben említett eset: egy olyan áramlás, amiből a (3.4) alapján számolt eloszlás megoldja az ütközésmentes kinetikai egyenletet, a makroszkopikus mennyiségek pedig a tökéletes folyadékok hidrodinamikai egyenleteit elégítik ki (ez, mint láttuk, már következik az előző tulajdonságból).

3.3. Nemrelativisztikus ütközésmentes áramlás

Ebben a szakaszban röviden és általánosító módon összefoglalom a [43] cikkben közölt eredményeket: belátjuk, hogy az ebben a cikkben közölt, az 1.5. szakaszban ismertetett nemrelativisztikus megoldásosztály speciális eseteként kapható hidrodinamikai áramlás olyan, amiben teljesülhet a fentebb kifejtett „effektív ütközésmentesség" kritériuma: a lokális termalizáció akkor is megmaradhat, ha a részecskék egyáltalán nem ütköznek.

Az előző szakaszban is említettek alapján az eloszlásfüggvény (3.4) alakja az $\varepsilon = \kappa p$, $\kappa = D/2$, $p = nT$ állapotegyenletet tünteti ki, ezért tehát ilyen megoldásokat keresünk, és az n, T és $\mathbf{v}$ ismeretlen változókat használjuk, a többit (ε, p) ezekből származtatjuk. Az ütközésmentes kinetikai egyenletre keresünk (3.4) alakú megoldást; az előző szakasz alapján ekkor a hidrodinamikai egyenletekre (melyeket az 1.4.2. szakaszban láttunk) is megoldást kapunk. Hogy felderítsük, léteznek-e ilyen áramlási profilok, egyszerűen be kell helyettesítenünk a (3.3) összefüggéssel megadott f-et a (3.7) egyenletbe. A következőt kapjuk[7]:

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{p_k\partial_k n}{m_0 n}+\left(\frac{(\mathbf{p}-m_0\mathbf{v})^2}{2m_0T^2}-\frac{\kappa}{T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{p_k\partial_k T}{m_0}\right)+\frac{p_k-m_0v_k}{T}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}+\frac{p_l\partial_l v_k}{m_0}\right)=0. \quad (3.13)$$

[6] A valóságban az egzakt lokális termikus egyensúly persze csak közelítés, éppen annyira, amennyire a tökéletes folyadék-kép: az eloszlásfüggvény lokális termikus formától való eltérésének figyelembevételével adódik a disszipatív folyamatok (viszkozitás, hővezetés) mikroszkopikus értelmezése.

[7] Mivel az ütközésmentes Boltzmann-egyenlet az f-nek csak első deriváltjait tartalmazza, maga az f kiesik az egyenletből. Sőt, továbbmenve: ha egy adott f megoldja ezt, akkor f-nek bármilyen függvénye is. Így ha az f eloszlásfüggvényre $f \sim B$ helyett $f \sim 1/\left(B^{-1}+1\right)$ vagy $f \sim 1/\left(B^{-1}-1\right)$ alakokat veszünk (azaz Boltzmann-eloszlás helyett a Fermi-Dirac– ill. a Bose-Einstein-statisztikának megfelelő eloszlásfüggvényeket), akkor sem változik az a kritérium, amit az ütközésmentesség támaszt: ha a Boltzmann-féle eloszlás teljesíti ezt (adott $u^\mu(x)$, $T(x)$, $\mu(x)$ mezőkre), akkor a Fermi-Dirac– és a Bose-Einstein-eloszlás is teljesíti. A továbbiakban tehát elég a Boltzmann-féle esetet tekinteni.

Ez akkor teljesülhet f független változóinak minden értékére, ha a p_k-ban különböző fokú tagok (p^3, p^2, p^1 és p^0) külön-külön is eltűnnek. Ezt a vizsgálatot a B.1. függelékben fejtem ki részletesen. Azt az eredményt kapjuk, hogy valóban lehetséges ilyen áramlás. Egy lehetséges speciális eset gömbszimmetrikus, és a következő képletek adják meg:

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{r}, \quad a^2(t) = \frac{T_i}{m_0}(t-t_0)^2 + a_0^2,$$

$$n = n_0 \frac{a_0^D}{a^D(t)} \exp\left\{-\frac{T_i}{2T_0}\frac{r^2}{a^2(t)}\right\}, \quad T = T_0 \frac{a_0^2}{a^2(t)}. \tag{3.14}$$

Ez nem más, mint az 1.5. szakaszban (1.28)–(1.29) alatt felidézett ismert nemrelativisztikus Buda-Lund-típusú megoldásnak [41] az 1.5.2. szakaszban említett egy lehetséges gömbszimmetrikus speciális esete. Ezt a megoldást most általános D dimenziószámra írtuk fel, az állapotegyenletre ilyenkor a $\kappa = D/2$ megkötés érvényes.

Az, hogy ez a folyadékprofil teljesíti az itt vizsgált ütközésmentesség kritériumát, ismert volt korábban is [43]. Érdemes megjegyezni, hogy az itt tárgyalt nemrelativisztikus hidrodinamikai megoldás felfedezése történetileg éppen fordítva alakult, mint ahogy fentebb kifejtettem: először egy konstans hőmérsékletű és Gauss sűrűségprofilú eloszlásfüggvény ütközésmentes időfejlődését vizsgálták, erről kiderült, hogy a későbbi időpillanatokban is ilyen alakú marad, majd később észrevették, hogy a kapott profilfüggvények a hidrodinamikai egyenletek megoldásait is adják [43]. Beláthatjuk ezen gondolatmenet érvényességét is, ha a megoldásnak megfelelő n, T és $\mathbf{v}$ előbb felírt kifejezéseit (3.3)-ba beírva felírjuk a megfelelő eloszlásfüggvényt: kis átalakítások után a következő alakot kapjuk:

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{n_0}{\sqrt{(2\pi m_0 T_0)^3}} \exp\left\{-\frac{T_i}{2T_0 a_0^2}\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{m_0}(t-t_0)\right)^2 - \frac{p^2}{2m_0 T_0}\right\},$$

azaz f-et konkrétan (3.8) mintájára az ütközésmentes esetnek megfelelő alakra lehet hozni.

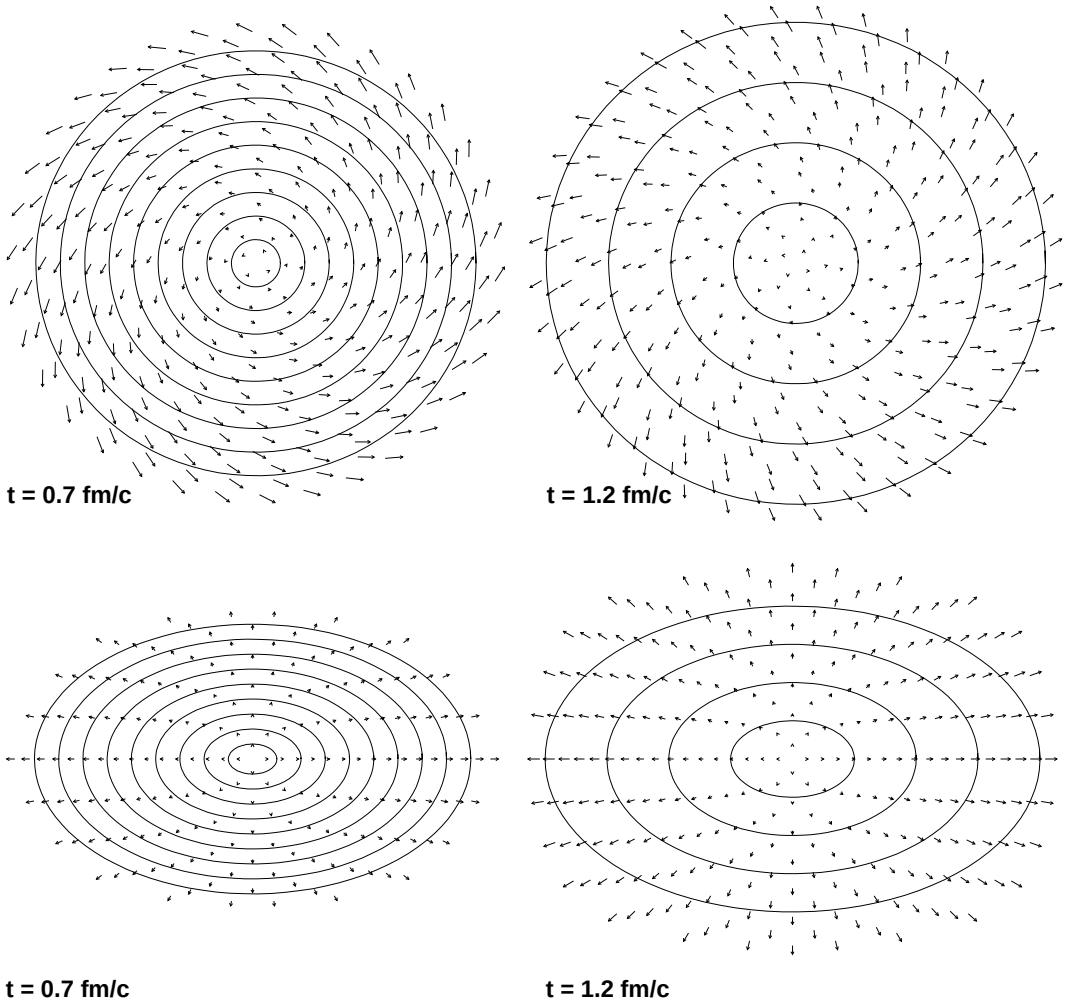
Három dimenzióban ($D = 3$) a legáltalánosabb nemrelativiszikus ütközésmentes áramlás a (3.14) megoldásnak egy forgó általánosítása (levezetését lásd a B.1. függelékben):

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{r} + \frac{a_0}{a^2(t)}\mathbf{C}_0 \times \mathbf{r} \quad , \quad a^2(t) = \frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0^2\right) + a_0^2, \tag{3.15}$$

$$n = n_0 \frac{a_0^3}{a^3(t)} \exp\left\{-\frac{T_i}{2T_0}\frac{r^2}{a^2(t)} - \frac{m_0}{2T_0}\frac{1}{a^2(t)}\left(C_0^2 r^2 - (\mathbf{C}_0\mathbf{r})^2\right)\right\}, \quad T = T_0 \frac{a_0^2}{a^2(t)}, \tag{3.16}$$

tetszőleges $\mathbf{C}_0$ vektorral. A 3.1. ábra ennek a forgó tágulásnak mintegy „felülnézeti”, azaz a forgást jellemző $\mathbf{C}_0$ vektorra merőleges, az origón átmenő síkkal való metszetből adódó képét

mutatja két különböző időpillanatban.



3.1. ábra. A (3.15)–(3.16) megoldás képe két időpillanatban ($T_0 = T_i = m_0$, $C_0 = 1,5 \cdot a_0$ paraméterekre). A felső ábrák a $\mathbf{C}_0$-ra merőleges, a lentiek a $\mathbf{C}_0$-at tartalmazó síkmetszetet mutatják; a körök n szintfelületeit jelölik.

A forgást jellemezhetjük a mozgó anyag teljes $\mathbf{M}_0$ impulzusmomentumával is, amelynek kifejezése egyszerűen megkapható egy adott $t = const$ időpillanatban vett térfogati integrállal. A teljes N_0 részecskeszám (ami $n\,(r,t)$ térfogati integrálja) és $\mathbf{M}_0$ is valóban konstansnak adódik. Definíció szerint

$$N_0 = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, n\,(t,\mathbf{r})\,, \quad \mathbf{M}_0 = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\, m_0 n\,(t,\mathbf{r})\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}\,(t,\mathbf{r})\,,$$

amiből (3.15)–(3.16) behelyettesítésével végzett egyszerű számolás az alábbi eredményre vezet:

$$N_0 = \frac{n_0 a_0^3}{T_i + m_0 C_0^2}\sqrt{\frac{(2\pi T_0)^3}{T_i}}, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{C}_0 N_0 m_0 a_0 \frac{2T_0}{T_i + m_0 C_0^2}. \tag{3.17}$$

Az impulzusmomentum valóban állandó időben: ahogyan tágul a folyadék, a forgómozgás átlagos szögsebessége egyre kisebb lesz az idő múlásával. Összegezve tehát: a (3.15)–(3.16) egyenletekkel leírt, forgó áramlást is magában foglaló megoldásosztály esetén lehetséges, hogy a lokális termalizáció részecskeütközések nélkül is fennmaradjon.

Fontos következménye van annak, hogy az n részecskeszámsűrűség-profil ilyen esetekben a (3.16) egyenletből jól láthatóan nem gömbszimmetrikus. Nemnulla $\mathbf{C}_0$-ra az n szintfelületei egy nyújtott forgási ellipszoidnak felelnek meg, $\mathbf{C}_0$ irányú tengellyel, éppen, mint egy nemcentrális atommagütközésben elképzeljük. Az ebből a megoldásból számolt részecskespektrumnak lesz nemeltűnő azimutális anizotrópiája, azaz a v_2 nemnulla lesz. Mindez azért érdekes, mert a v_2 elliptikus folyás hidrodinamikai képben való leírása nagy érdeklődésre tart számot, hiszen éppen v_2 alakjából következtettek a hidrodinamikai kép érvényességére a RHIC Au+Au ütközéseiben. Az itt bemutatott egzakt megoldás tehát lehetővé teszi az impulzusmomentum hatásának analitikus vizsgálatát.

3.4. Relativisztikus általánosítás

Most rátérünk a relativisztikus ütközésmentes áramlások vizsgálatára. Ezek olyan új eredmények, amelyek a nemrelativisztikus esetben látotthoz sok szempontból hasonlóak. Az ütközésmentes Boltzmann-egyenlet (3.9) alakú, mint láttuk, ha ezt (3.6) alakú eloszlásra alkalmazzuk, megkapjuk a hidrodinamikai egyenleteket is (az (1.12)–(1.14) alakban). Relativisztikus „ütközésmentes” áramlást keresünk. Behelyettesítve a (3.6) kifejezést (3.9)-be, megkapjuk ennek feltételét[8]:

$$p^\mu \partial_\mu \left(\frac{\mu}{T}\right) - p^\mu p^\nu \partial_\mu \left(\frac{u_\nu}{T}\right) = 0.$$

A nemrelativisztikus esethez hasonlóan erős megszorítást jelent, hogy ennek minden megengedett p_μ impulzusra azonosan teljesülnie kell. Tömeges részecskékre ez az alábbi feltételeket jelenti:

$$\partial_\mu \left(\frac{\mu}{T}\right) = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{u_\nu}{T}\right) + \partial_\nu \left(\frac{u_\mu}{T}\right) = 0, \tag{3.18}$$

[8] A 7. lábjegyzetben mondottak relativisztikus esetben is érvényesek: ha a Maxwell-Boltzmann-eloszlás teljesíti az ütközésmentesség kritériumát, akkor a megfelelő Fermi-Dirac– és Bose-Einstein-eloszlás is.

tömegtelen (ultrarelativisztikus) részecskékre pedig

$$\partial_\mu \left(\frac{\mu}{T}\right) = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{u_\nu}{T}\right) + \partial_\nu \left(\frac{u_\mu}{T}\right) = g_{\mu\nu}\alpha \tag{3.19}$$

kell, hogy teljesüljön, ahol $\alpha \equiv \alpha(x)$ tetszőleges függvény[9]. Most ez utóbbi, tömegtelen — nyilván bővebb lehetőségeket megengedő — esetet vizsgáljuk tovább. Látjuk, hogy a $\frac{\mu}{T} = const$ feltétel mindenképpen teljesül. Ebből, a $\kappa = D$ követelményből, és az állapotegyenletre vonatkozó, (2.22)-ben felírt azonosságok alapján következik, hogy $T^D = const \cdot n$. Ezt beírva az n-re vonatkozó (1.14) kontinuitási egyenletbe, és összevetve (3.19) második egyenletének nyomával, kiderül, hogy az eddig még tetszőleges α függvényre az $\alpha = 2u^\mu \partial_\mu (1/T)$ választást kell tennünk. Ez tömeges részecskékre is érvényes, azonban ott az $\alpha = 0$ követelménnyel együtt ez már túl erős megszorítás[10]. Emiatt innentől kezdve a tömegtelen részecskék esetére koncentrálunk.

A megoldandó egyenlet tömegtelen esetben tehát

$$\partial_\mu \left(\frac{u_\nu}{T}\right) + \partial_\nu \left(\frac{u_\mu}{T}\right) = 2g_{\mu\nu}u^\rho \partial_\rho \left(\frac{1}{T}\right). \tag{3.20}$$

Tömegtelen részecskék esetére, ahogy a 3.2. szakaszban is felidéztük, az $\varepsilon = \kappa p$, $\kappa = D$ a természetes állapotegyenlet. Ekkor, mint láttuk, (3.20) tartalmazza az energiamegmaradási és az n-re vonatkozó kontinuitási egyenletet is. Könnyen ellenőrizhető, hogy az α előbb leírt választásával az Euler-egyenlet is megkapható (3.20)-ból[11].

Összefoglalva: akkor találhatunk értelmes, a nehézion-ütközések leírása szempontjából érdekes ütközésmentes megoldást, ha tömegtelen részecskéket teszünk fel, $\kappa = D$-vel felírt $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenletet használunk, a részecskeszámra $p = nT$ érvényes, és μ/T konstans. Az *egyetlen* megoldandó egyenlet pedig (3.20). Ez utóbbit átírhatjuk az alábbi formába, ha bevezetjük az

[9] Ha egy $M_{\mu\nu}$ szimmetrikus tenzorra megköveteljük, hogy minden (tömeges részecskének megfelelhető) p^μ négyesimpulzusra $M_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ teljesüljön, akkor könnyű leellenőrizni (pl. komponensenként), hogy ez csak $M_{\mu\nu} = 0$ esetben lehetséges. Tömegtelen esetben hasonló vizsgálattal a $M_{\mu\nu} = const \cdot g_{\mu\nu}$ követelményre jutunk; a nagyobb szabadságot végső soron az okozza, hogy itt a $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ megszorítás van érvényben.

[10] Tömeges esetben $\alpha(x) = 0$ miatt $u^\mu \partial_\mu T = 0$ kell, hogy teljesüljön, azaz a T hőmérsékletnek minden folyadékelem-trajektórián állandónak kellene lennie. Ebből $\mu = const \cdot T$ miatt ugyanez lenne igaz a kémiai potenciálra, és ezekből már az is következne (mivel az állapotegyenletet mindig megadja a $p(T,\mu)$ függvény, és ebből egyértelmű $n(T,\mu)$ és $s(T,\mu)$ kapcsolat adódik), hogy az összes termodinamikai mennyiség konstans egy folyadékelem trajektóriája mentén. Ilyen áramlások bizonyára nem a miáltalunk keresett, tágulást leíró típusúak.

[11] Az Euler-egyenlet (2.8) alatti alternatív alakja $\mu/T = const$ esetén a következő:

$$Tu^\nu \partial_\nu u^\mu = \left(g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu\right) \partial_\nu T,$$

ez megkapható, ha (3.20)-ban u^ν-vel index-összeejtést végzünk.

$A^\mu = u^\mu \frac{T_0}{T}$ jelölést (ahol T_0 itt is csupán egy hőmérsékleti skálát definiál):

$$A^\rho A^\sigma \left\{ g_{\mu\nu} \left(\partial_\rho A_\sigma + \partial_\sigma A_\rho \right) - g_{\rho\sigma} \left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \right) \right\} = 0. \tag{3.21}$$

Ezen egyenlet megoldásait fogjuk megkeresni, amiből tehát rekonstruálható minden mennyiség: az A definíciójából megkapható T és u^μ, ezután pedig a $\mu/T = const$ feltételből, illetve az állapotegyenletünkre érvényes az (1.8) összefüggésekből n is, a következőképpen:

$$T = T_0 \frac{1}{\sqrt{A^\mu A_\mu}}, \quad u^\mu = \frac{T}{T_0} A^\mu, \quad n = n_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\kappa, \quad (\kappa = D), \quad p = nT. \tag{3.22}$$

Elég tehát A^μ-t megtalálnunk. Beláthatjuk (pl. úgy, hogy minden komponensét külön felírjuk), hogy a (3.21) egyenlet ekvivalens azzal, amit úgy kapunk, hogy elhagyjuk belőle az $A^\rho A^\sigma$-val való index-összeejtést. Tehát egy *lineáris* tenzoriális differenciálegyenletet kapunk A^μ-re:

$$g_{\mu\nu} \left(\partial_\rho A_\sigma + \partial_\sigma A_\rho \right) - g_{\rho\sigma} \left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \right) = 0. \tag{3.23}$$

Ez az egyenlet homogén, így bármely két megoldás lineáris kombinációja is az. Az egyenlet részletes vizsgálata a B.2. függelékben található. Figyelemre méltó, hogy lineáris egyenletről van szó, ami a hidrodinamikai egyenletek nemlinearitásához képest lényeges egyszerűsödés: erre az egyenletre szisztematikus módon meg lehet találni az összes megoldást. Érdekes módon kiderül, hogy az ebből kapott hidrodinamikai megoldások között felbukkannak ugyanazok, amiket a 2.2 szakaszban láttunk, akár az $1+1$ dimenziós általános megoldásra gondolva, akár a többdimenziós, gyorsuló (2.30) áramlási profilra! Úgy tűnik tehát, hogy ezek az új megoldások több szempontból is nagyon mélyen hozzátartoznak az egyszerű relativisztikus megoldások családjához (csakúgy, mint a Gauss-profilú önhasonló tágulás a nemrelativisztikus esetben [43]).

3.4.1. Forgó és haladó táguló megoldások

Először a háromdimenziós esetben vizsgáljuk meg a (3.23) egyenletet, amely ütközésmentes hidrodinamikai megoldásokat generál. A B.2. függelékben bebizonyítjuk, hogy a (3.23) egyenletet $D = 3$ esetén kielégítő legáltalánosabb A^μ vektor alakja a következő:

$$A^\mu (x) = a^\mu + \gamma x^\mu + F^{\mu\nu} x_\nu + \left(b^\nu x_\nu \right) x^\mu - \frac{b^\mu}{2} \left(x^\nu x_\nu \right). \tag{3.24}$$

Ebben a tetszőlegesen megválasztható állandók: a γ skalár, az a^μ és a b^μ négyesvektorok, ill. az $F_{\mu\nu}$ antiszimmetrikus négyestenzor. (Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ez az A^μ valóban megold-

ja (3.23)-at.) A következőkben megvizsgáljuk a bevezetett állandók különböző választásaival kapható lehetséges eseteket. A hőmérséklet– és sebességprofilt mindenhol a (3.22) egyenletből határozhatjuk meg, itt csak az eredményeket közlöm.

1. Tegyük fel először, hogy az $F_{\mu\nu} = 0$ és $b^\mu = 0$! Ekkor ha γ is eltűnik, az eredmény egy homogén álló folyadék (abban a rendszerben, ahol a^μ az időtengely irányába mutat). Ha viszont $\gamma \neq 0$, akkor az $x^\mu \to x^\mu - a^\mu/\gamma$ eltolással a^μ-t nullává tehetjük. A $\tau_0 = \frac{1}{\gamma}$ jelölést bevezetve ekkor a folyási képre a következő adódik:

$$u^\mu = \frac{x^\mu}{\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{t}, \quad T = T_0 \frac{\tau_0}{\tau}, \quad n = n_0 \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^D,$$

és persze $p = nT$. (Ez utóbbi ebben a fejezetben mindig igaz, nem írom ki külön mostantól.) Ez egy valódi lehetőség relativisztikus ütközésmentes áramlásra, felismerjük benne a már sokszor tárgyalt gyorsulásmentes, 1+1 dimenzióban Hwa-Bjorken–, 3 dimenzióban Hubble– vagy Buda-Lund-megoldásként ismert megoldást (illetve a többdimenziós megoldás (1.34) alatti felírásának $\nu(A) = 1$-hez tartozó speciális esetét, lásd az 1.5. szakaszt). Itt az új eredmény tehát az „effektív ütközésmentesség" teljesülése, az e fejezetben tárgyalt értelemben.

2. Ha $b^\mu \neq 0$, akkor $F_{\mu\nu}$ és a^μ újradefiniálásával, valamint a koordinátarendszer eltolásával mindig elérhető, hogy $\gamma = 0$ legyen. A legegyszerűbb eset, ha ekkor $F_{\mu\nu} = 0$ is teljesül. Időszerű b^μ esetén választhatunk olyan vonatkoztatási rendszert, ahol $b^\mu = (\zeta, \mathbf{0})$. Ha a^μ párhuzamos b^μ-vel, akkor a ρ paraméter teljesen leírja a megoldást: $a^\mu = \left(\frac{\zeta\rho}{2}, \mathbf{0}\right)$, így az eredmény:

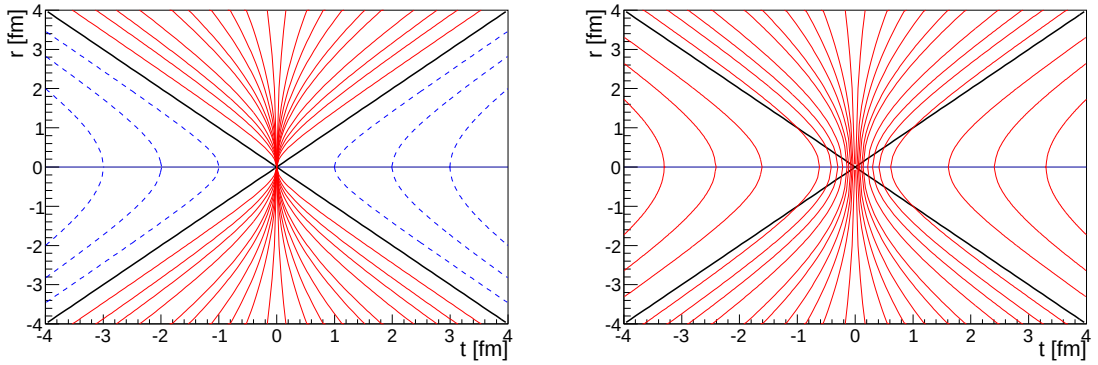
$$\mathbf{v} = \frac{2t\mathbf{r}}{t^2 + r^2 + \rho}, \quad T = \frac{T_0 \tau_0^2}{\sqrt{(t^2 - r^2 + \rho)^2 + 4\rho r^2}}, \quad p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa+1}. \tag{3.25}$$

A ζ konstans helyett bevezettük a τ_0-t, a kapcsolat közöttük: $\zeta\tau_0^2 = 2$.

Ez a megoldás a $\rho = 0$ esetben megegyezik az előző fejezetben a Khalatnikov-egyenlet segítségével talált (2.30) megoldással. A $\rho > 0$ eset érdekes új eredmény: ez az áramlás gömbszimmetrikus, $\kappa = D$ állapotegyenletre érvényes megoldás, és egy realisztikus vonása abból látható, ha a T hőmérsékletet felírjuk Rindler-koordinátákkal:

$$T = \frac{T_0 \tau_0^2}{\sqrt{(\tau^2 + \rho)^2 + 4\rho\tau^2 \mathrm{sh}^2\eta}}, \quad p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa+1}. \tag{3.26}$$

Látszik ebből, hogy a T hőmérsékletprofil, a p nyomás és az n részecskeszám is véges az η peszudorapiditásban (azaz: adott $\tau = \tau_1$ hiperfelületen $\eta \to \pm\infty$-re nullához tartó). Az A.3.1. és A.3.2. függelékekben belátjuk, hogy egy egyszerű feltevést téve ez a megoldás is (csakúgy,



3.2. ábra. A bal oldalon a korábban látott (2.30) megoldás trajektóriáinak képe (ez lényegében azonos a 2.1. ábrával), a jobb oldalon pedig ugyanez a most látott (3.25) általánosítás esetében, $\rho = 1$ fm^2-re illusztrálva.

mint az előző fejezetben tárgyalt (2.30) megoldás) lényegében egyértelműen megkapható a (2.26) gömbszimmetrikus Khalatnikov-egyenletből (vagy a (2.27)-ben látott általánosításából).

Az A skálázófüggvényt könnyen meghatározhatjuk az $\dot{A} + vA' = 0$ feltételből:

$$\mathbf{v} = \frac{2t\mathbf{r}}{t^2 + r^2 + \rho}, \quad A = \frac{r}{t^2 - r^2 + \rho} = \frac{r}{\tau^2 + \rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla A = 0. \tag{3.27}$$

Ezzel (3.27)-nél egy kicsit általánosabb hidrodinamikai megoldást is kaphatunk, ahol $\mathbf{v}$ alakja ugyanaz, T és n alakjai pedig egy tetszőleges $\nu(A)$ függvénnyel a következők:

$$T = \frac{T_0\tau_0^2}{\sqrt{(t^2 - r^2 + \rho)^2 + 4\rho r^2}} \frac{1}{\nu(A)}, \quad n = \frac{n_0\tau_0^{2D}}{\left((t^2 - r^2 + \rho)^2 + 4\rho r^2\right)^{D/2}} \nu(A). \tag{3.28}$$

Ez megoldása a hidrodinamikai egyenleteknek, viszont az ütközésmentesség csak az előzőleg felírt, $\nu(A) = 1$ speciális esetben igaz rá (az előző 1. esethez és a 3.4.2. szakaszban látottakhoz hasonlóan.) Mivel p (az előbbi értelemben) véges η-ban, választhatunk sokféle olyan $\nu(A)$-t, hogy T és n is az legyen.

Az A kifejezéséből a folyadékelemek világvonalait is felírhatjuk. A korábbi, $\rho = 0$ esetre ezek (relativisztikus értelemben) egyenletesen gyorsulónak adódtak, itt is lényegében hasonlóak (pl. itt is minden trajektória sebessége a fénysebességet közelíti). A 3.2. ábra mutatja ezeket a trajektóriákat a korábban is látott $\rho = 0$, illetve a $\rho = 1$ fm^2 esetre (a ρ dimenziója hosszúságnégyzet.) Látszik, hogy a $\rho = 0$ esetben a kezdeti tűzgömb végtelenül sűrű és kicsi pont, a $\rho > 0$ esetben ez a pont mintegy „el van kenve” egy $\sim \sqrt{\rho}$ sugarú tartományon.

3. Ha az előző esethez még hozzávesszük azt a lehetőséget, amikor a (3.24) egyenletben

szereplő a^μ négyesvektor nem feltétlenül párhuzamos a b^μ-vel, akkor olyan megoldást kapunk, aminek nemnulla össz-impulzusa van. Ha az $a^\mu = \left(\frac{\zeta\rho}{2}, \frac{\zeta\mathbf{a}}{2}\right)$, és, mint az előbb, a $b^\mu = (\zeta, \mathbf{0})$ parametrizálást használjuk, a megoldás így írható fel:

$$\mathbf{v} = \frac{2t\mathbf{r} + \mathbf{a}}{t^2 + r^2 + \rho}, \quad T = \frac{T_0\tau_0^2}{\sqrt{\left(t^2 - r^2 + \rho\right)^2 + 4\rho r^2 - a^2 - 4t\left(\mathbf{ar}\right)}}, \quad p = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa+1}. \tag{3.29}$$

Látszik, hogy $\rho > 0$ és $\mathbf{a} \neq 0$ esetben a kezdeti, $\sim \sqrt{\rho}$ sugarú tűzgömb egészében halad az $\mathbf{a}$ vektor által megadott irányba. A félreértések elkerülése végett megjegyezzük, hogy ez a haladás nem homogén (ahogy látható, ha a $t = 0$ időpontot nézzük), tehát az áramlási kép nem az előző megoldásoknak egy mozgó megfigyelő által látott képe. Természetesen itt is meghatározhatnánk az A skálázófüggvényt, amivel a megoldást hasonlóan általánosíthatjuk (és az általánosítás már nem lenne ütközésmentes), mint az előző, (3.25) esetben.

4. Talán legérdekesebbek az előzőek forgást is tartalmazó általánosításai: itt az induló állapot egy $\sim \sqrt{\rho}$ sugarú, forgó gömb. (3.24)-ben legyen továbbra is b^μ időszerű vektor, amihez rögzítjük a vonatkoztatási rendszerünket: $b^\mu = (\zeta, \mathbf{0})$, és legyen most az $F_{\mu\nu}$ tenzor nemeltűnő: paraméterezzük az $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ hármasvektorokkal a következőképpen (az elektrodinamika térerősségtenzora kapcsán megszokotthoz hasonló módon): $F_{0i} = \frac{1}{2}\zeta E_i$, $F_{ik} = \frac{1}{2}\epsilon_{ikl}B_l$, és legyen $a^\mu = \left(\frac{\zeta\rho}{2}, \frac{\zeta\mathbf{a}}{2}\right)$. Kiderül, hogy a paraméterek megfelelő átdefiniálásával és az origó eltolásával elérhető, hogy $\mathbf{E}$-t nullának válasszuk[12]. Ekkor a sebességmező és a hőmérséklet a következő:

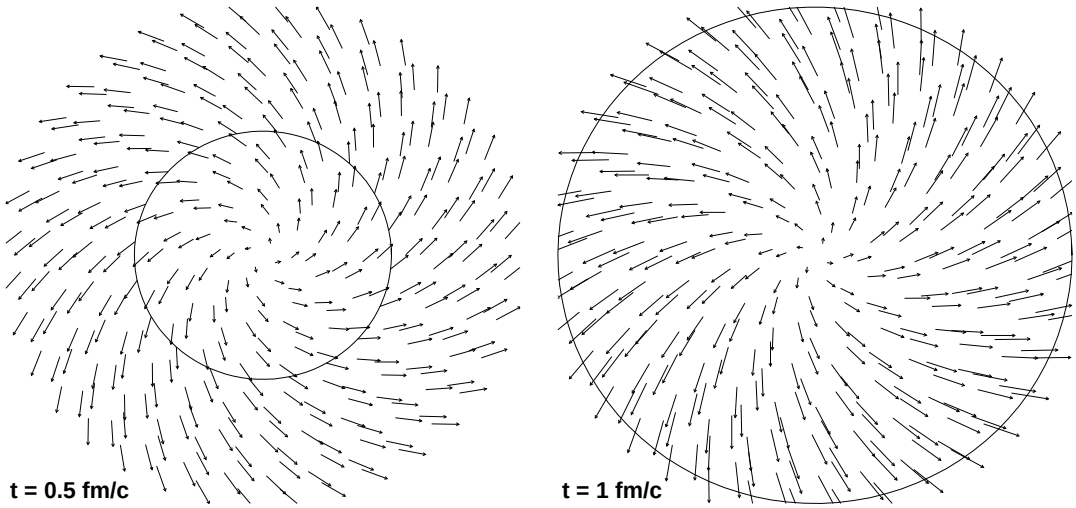
$$\mathbf{v} = \frac{2t\mathbf{r} + \mathbf{a} + \mathbf{B} \times \mathbf{r}}{t^2 + r^2 + \rho}, \quad p = p_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa+1}, \tag{3.30}$$

$$T = \frac{T_0\tau_0^2}{\sqrt{\left(t^2 - r^2 + \rho\right)^2 + 4\rho r^2 - \left(\mathbf{B} \times \mathbf{r} + \mathbf{a}\right)^2 - 4t\left(\mathbf{ar}\right)}}. \tag{3.31}$$

Tudomásom szerint korábban nem volt ismeretes a relativisztikus hidrodinamikában forgó tágulást leíró egzakt megoldás. A 3.3. ábra az $\mathbf{a} = 0$-hoz tartozó áramlási képet (a $\mathbf{B}$ vektorra merőleges metszetet) mutatja két időpillanatban, a 3.1. ábrához hasonló elrendezésben. A (3.31)-ből látható, hogy az, amit az elliptikus folyás kapcsán a nemrelativisztikus forgó megoldásokról a 3.3. szakasz végén mondtunk, itt is igaz: a T hőmérséklet és az n részecskeszámsűrűség nem gömbszimmetrikus, vagyis az ebből a megoldásból számolt v_2 zérustól különböző lesz.

5. A (3.24) alapján, az előző 1. esetet általánosítva a Buda-Lund-típusú gyorsulásmentes megoldásra is felírhatunk forgó általánosítást: legyen $b^\mu = 0$, $\gamma \neq 0$, és $F_{\mu\nu}$ sem nulla, ekkor

[12] Az elektrodinamikában ismert, hogy az elektromos teret Lorentz-transzformációval nem mindig lehet nullává tenni (pl. egy szabad elektromágneses hullámban soha sem). Itt teljesen más helyzetről van szó: eltolásról, amivel a (3.24)-ben lévő x^μ-ben kvadratikus tagokba lehet $\mathbf{E}$-t beolvasztani.



3.3. ábra. A (3.30) forgó relativisztikus hidrodinamikai megoldás **B**-re merőleges metszeti képe két időpillanatban ($\rho = 1$ fm^2, $B = 1$ fm választással). Az $|r| = t$ fénykúpot is jelöltem.

a^μ-t megint vehetjük nullának. Ismét a $\tau_0 = 1/\gamma$ jelölést használva, és most $F_{\mu\nu}$-t az $F_{0i} = \gamma E_i$, $F_{ik} = \gamma \epsilon_{ikl} B_l$ módon paraméterezve az **E** és a **B** vektorokkal, a következő megoldást írhatjuk:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r} + \mathbf{E}t + \mathbf{B} \times \mathbf{r}}{t + \mathbf{E}\mathbf{r}}, \quad T = \frac{T_0 \tau_0}{\sqrt{\tau^2 + (\mathbf{B}\mathbf{r})^2 - B^2 r^2 - E^2 t^2 + (\mathbf{E}\mathbf{r})^2}}, \quad p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\kappa+1}. \tag{3.32}$$

6. Ha a (3.24)-ben szereplő b^μ vektor térszerű, nem kapunk értelmes megoldást. Ilyenkor vehetünk olyan vonatkoztatási rendszert, ahol $b^\mu = (0, \mathbf{b})$, és pl. a $\gamma = 0$, $F_{\mu\nu} = 0$ esetben könnyen belátható, hogy a sebességmező az egész térben 1-nél (azaz fénysebességnél) nagyobb abszolútértékűnek adódna.

Ezzel befejeztük a (3.24) egyenlet vizsgálatát három dimenzióban: néhány nem különösen érdekes, az előzőek kombinációjaként kiadódó esettől eltekintve (mint amilyen pl. az 5. eset általánosítása nemnulla a^μ-re lenne) végigelemeztük az összes olyan relativisztikus hidrodinamikai megoldást, amiben a lokális termalizáció megmaradhat a részecskék ütközésmentes mozgásával is. Mint láttuk, minden ilyen megoldás megkapható a (3.24) és a (3.22) egyenletekből.

3.4.2. Az $1+1$ dimenziós eset

Az előző szakasz vizsgálatait, az ütközésmentesség kritériumának eleget tevő megoldások megkeresését egydimenziós esetben is el lehet végezni. Elöljáróban felidézzük, hogy amint a 2. fejezet végén, a 2.4. szakaszban láttuk, a $\kappa = D = 1$ eset speciálisan egyszerű: általánosan fel lehet írni a hidrodinamikai egyenletek megoldását. A B.2. függelékben kiderül, hogy az

ütközésmentesség szempontjából is ez a helyzet: a 2.4. szakaszban felírt általános megoldás kis specializációja már ütközésmentes is. Konkrétan: megállapítottuk, hogy tetszőleges $f(x^+)$, $g(x^-)$ függvényekre ($x^\pm = t \pm r$) az általános megoldás (2.51)–(2.52) alakú. A B.2. függelékből és a (3.22) kifejezésből látható, hogy ennek a következő speciális esete már ütközésmentes megoldás:

$$v = \frac{g(x^-) - f(x^+)}{g(x^-) + f(x^+)}, \quad T = T_0 \left(f\left(x^+\right) g\left(x^-\right)\right)^{1/2}, \quad n = n_0 \left(f\left(x^+\right) g\left(x^-\right)\right)^{1/2}.$$

A (2.4). szakaszban látott általános hidrodinamikai megoldásban még (2.52) szerint megjelenhetne egy tetszőleges $\nu(A)$ függvény; látjuk tehát, hogy a $\nu(A) = 1$ eset ad „effektíve ütközésmentes" megoldást.

3.5. Diszkusszió

Többször aláhúztam, hogy ha egy hidrodinamikai áramlás (megoldás) az ebben a fejezetben tárgyalt értelemben ütközésmentes, az nem jelenti azt, hogy ténylegesen nincsenek ütközések a részecskék között. Csupán annyit, hogy lehetséges olyan mikroszkopikus időfejlődést megadni, amikor ez teljesül. Mindenképpen jelent ez azonban valamit a megoldásból adódó megfigyelhető mennyiségekre nézve: ezeket a kifagyási hiperfelületen számítjuk ki az ott érvényes $T(x)$, $\mu(x)$, stb. paraméterekkel, melyek meghatározzák a lokális termikus eloszlást, és a részecskékről azt képzeljük, hogy kifagyás után egymástól függetlenül egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek. Tehát megállapíthatjuk, hogy ha az ütközésmentes áramlásban feltételezett részecskék keletkezését nézzük, akkor az egyrészecske-megfigyelhető mennyiségek (spektrum, rapiditáseloszlás, elliptikus folyás, stb.) egyáltalán nem függenek attól, hogy mikor és milyen felületen történik a kifagyás (hiszen matematikailag az eloszlás olyan, mintha ütközésmentesen mozogtak volna a részecskék már a kifagyás előtt is). Ilyen helyzet áll elő, ha a nemrelativisztikus esetben m_0 tömegű részecskék keltését, vagy ha a relativisztikus tárgyalt esetekben tömegtelen részecskék keltését vizsgáljuk. Ha a relativisztikus esetben a keltett részecskéket tömegesnek tekintjük, már nem igaz ez az állítás: a megfigyelhető mennyiségek függeni fognak a kifagyási felülettől is.

Ugyanez igaz a kétrészecske-korrelációkra: noha ezek kiszámítása a forrás Fourier-transzformáltjának segítségével történik, és emiatt általában megjelenik benne a forrás fizikai méretskálája (éppen ezért hasznos módszer az interferometria a forrás méretének és alakjának kiderítésére), az ütközésmentes megoldások esetén a korrelációs függvények is függetlenek a kifagyás idejétől (összhangban [34, 43] eredményeivel).

Nagyon leegyszerűsítve azt is mondhatjuk, hogy több ilyen ütközésmentes megoldás valamilyen értelemben aszimptotikus eset. Ilyen pl. a Hubble-tágulás: sok más egzakt és numerikus megoldásról belátható, hogy $t \to \infty$ határesetben Hubble-alakhoz tart (legfeltűnőbb pl. az 1.5. szakaszban (1.28)–(1.29) alatt felidézett, már korábban is ismert elliptikus megoldás: itt a tengelyek mozgásegyenletéről, (1.30)-ról megállapíthattuk, hogy nagy időkre konstans gömbszimmetrikus tágulást írnak le). Több egzakt megoldásnál is jelentkezik az, hogy a megfigyelhető mennyiségek nagy időkre (azaz a kifagyási idő elég nagyra választásakor) mintegy állandó értékekhez tartanak: gondolhatunk erre az eddigiek alapján úgy is, hogy ezek a megoldások határesetben ütközésmentes áramlásokká válnak.

Azt mindenesetre érdekes látni, hogy a termalizáció néha kevésbé kapcsolódik a mikroszkopikus ütközésekhez, mint azt a statisztikus fizikai szemlélettel gondolnánk. Itt egzakt eredményekkel foglalkoztunk, de nincs kizárva, hogy általánosabb esetben is kitüntetettek azok az áramlások (és kezdeti feltételek), ahol kisebb szükség van az ütközésekre a termalizációhoz (vagy más szóval: könnyebben tűnhet termalizáltnak a rendszer). Ez érdekes lehet, mivel a nehézion-reakciókban a termalizáció ma sem teljesen megértett folyamat.

A talált egzakt megoldások önmagukban is érdekesek, különös tekintettel a forgást is paraméterként tartalmazókra. Ilyenek eddig nem voltak ismertek. Nemcentrális (azaz félig „súroló”) nehézion-ütközésekben a nyalábtengelyre merőleges irányú kezdeti impulzusmomentum van jelen, egy ilyen tágulás analitikus leírására kiválóan használhatóak lehetnek a forgó egzakt megoldások. Említésre méltó talán, hogy a keletkezett kvark-gluon-plazma ilyen forgásából adódó erős mágneses térben fellépő effektusok nagy érdeklődésre tartanak számot; a kollektív dinamika követése ezért is fontossá válhat.

A bemutatott forgó megoldások látott másik tulajdonsága az elliptikus lapultságú sűrűségprofil, ami nyilvánvalóan nemnulla azimutális anizotrópiára (azaz v_2-re) vezet. A fejezetben mondottak alapján tehát megállapíthatjuk, hogy nemnulla elliptikus folyás adódhat akkor is, ha nincs szerepe a mikroszkopikus részecskék ütközésének: ez érdekes, mivel a folyás fennmaradását általában az erős csatolással és az ebből adódó folyadék-jelleggel indokolják (mint azt röviden összefoglaltam az 1.2. szakaszban). Ez nem érvényteleníti a folyadék-jellegre vonatkozó következtetést, amely azt mondja, hogy a gázban történő ütközések kioltanák az elliptikus folyást: itt azt láttuk, hogy egy kivételes esetben akár erős csatolás nélkül, az ütközések szerepének teljes elhanyagolásával is adódhat nemnulla elliptikus folyás. Természetesen további részletes vizsgálatokra van szükség a bemutatott forgó megoldások, az impulzusmomentum és az elliptikus folyás kapcsolatának kvantifikálására. Ezek a vizsgálatok azonban túlmutatnak a jelen dolgozat keretein.

4. fejezet

Fenomenológiai alkalmazások

Ebben a fejezetben egy példát mutatok arra, hogy hogyan lehet az egzakt hidrodinamikai megoldásokat a nagyenergiás ütközésekben mért megfigyelhető mennyiségek leírására használni. A keletkező hadronok $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta}$ és $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ (pszeudo)rapiditás-eloszlásával fogunk foglalkozni: ezek az 1.1. szakaszban bevezetett eloszlásfüggvények p_T-re és φ-re kiintegrált változatai.

Itt tehát részleteiben végigkövetjük az 1. fejezetben a hidrodinamikai modellek alapvetésekénti felvázolt módszert, amellyel a folyási képtől eljutunk a kísérleti adatokkal összehasonlítható formulákig. A választott hidrodinamikai megoldás az előzőekben (pl. a 2.3. szakaszban) felírt λ-megoldások közül az $1+1$ dimenzióban értelmezett, a kevéssé realisztikus $\varepsilon = p$ állapotegyenletű, de általános λ-val jellemzett megoldás (a 2.1. táblázat *e*. sora). Az ebből számolt rapiditáseloszlásra levezetünk egy közelítő analitikus képletet. Látni fogjuk, hogy ez a közelítés nem ad (magának a modellalkotásnak bizonytalanságához képest) jelentős hibát, vagyis az így kapott formulát használhatjuk az adatok leírására. Látni fogjuk azt is, hogy a kapott formula y-ban (ill. az η-ban) véges rapiditáseloszlást ír le.

Konkrét kísérleti adatokat is megvizsgálunk: a RHIC nehézion-gyorsítónál működő BRAHMS kísérlet széles y-tartományon megmérte a keletkező hadronok (pszeudo)rapiditás-eloszlását a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV nukleononkénti energiájú Au+Au ütközésekben. (Az LHC gyorsítónál jelenleg[1] még nem publikáltak olyan mérést, amire a tárgyalt módszert alkalmazhatnánk.) Megvizsgáljuk, hogy az itteni egyszerű modellünk milyen λ paraméterrel írja le legjobban a mért eloszlást, így információt nyerünk a hidrodinamikai tágulás longitudinális gyorsulására.

Az a tény, hogy a rapiditáseloszlás végességét az analitikus megoldásaink alkalmazásával, analitikus képletekkel le tudjuk írni, egy nagyon fontos kérdéskör tárgyalását teszi lehetővé. A rapiditáseloszlás egy fontos alkalmazása Bjorken nyomán [46] a reakció kezdeti energiasűrűségének becslése. Bjorken módszere arra az idealizált esetre vonatkozik, amikor a rapiditáseloszlás

[1] A dolgozat véglegesítésekor, 2012. áprilisában.

y-ban konstans, azaz boost-invariáns, amikor a longitudinális tágulást a boost-invariáns, és emiatt gyorsulásmentes Hwa-Bjorken-megoldással lehet leírni. Kísérletileg azonban nyilvánvaló, hogy a rapiditáseloszlás véges, azaz nem boost-invariáns. Módszerünkkel tehát, mivel sikerül kapcsolatot teremteni a gyorsulás mértéke és a rapiditáseloszlás kísérletileg mérhető szélessége között, pontosíthatjuk az energiasűrűség-becslést: a gyorsulás miatti munkavégzés nemnulla volta, és a térfogatelemek gyorsuló tágulásának figyelembevétele (melyek a Bjorken-módszerben nem szerepelnek) is arra vezet, hogy a valódi energiasűrűség a Bjorken-becslésből kapottnál magasabb. Nagyságrendileg 100%-os korrekciót kapunk a $\kappa = 1$ állapotegyenletre vonatkozóan, és egy sejtést fogalmazunk meg, amely általánosabb állapotegyenletekre (azaz κ realisztikusabb értékeire) további korrekciót ad, nagyságrendileg 50%-osat.

Az ebben a fejezetben leírtak az előző két fejezet egzaktabb, szinte inkább matematikai jellegű eredményeihez képest alkalmazáscentrikusabbak, több intuitív egyszerűsítéssel élünk. Ugyanakkor a fejezet fő mondanivalója, az energiasűrűség-becslés pontosítása a rapiditáseloszlás pontosabb analitikus leírása alapján, általános érvényű megállapításokra vezet: a gondolatmenet lényeges motívumai a számítás részleteitől függetlenül igazak. Ennek bemutatására mindvégig kísérletet teszek. Így tehát, noha a pontos számok, amit a modellünkből kaphatunk, bizonyára csak közelítései a valóságnak, mégis alapvető eredmények: ez az első olyan módszer, ami egyszerű gondolatmenettel, analitikus formulákkal adja meg a Bjorken-féle energiasűrűség-becslés pontosítását. A fejezet alapjául a már hivatkozott [50] és [51] publikációk szolgálnak.

4.1. Motiváció

A nehézionfizikában az egyik tanulmányozni kívánt jelenség a kvark-hadron fázisátmenet. Régóta az a várakozás, hogy a kvark-gluon-plazma fázis létrejöttéhez kb. 1 GeV/fm^3 energiasűrűség szükséges: mind a korai becslésekben [1] (melyek a tipikus hadronanyag-sűrűségből indultak ki), mind az újabb rács-QCD számolások ezt az értéket sugallják (utóbbiról lásd pl. a [20] cikket, ill. az 1.1. ábrát)[2].

A kezdeti energiasűrűséget tehát mindenképp fontos a kísérletekben meghatározni. Egy módszer lehetne erre a relativisztikus kinematika egyszerű alkalmazása: E nukleononkénti energiájú ultrarelativisztikus nehézion-ütközések tömegközépponti rendszerében a magok $\gamma = E/m_N$ Lorentz-faktorral rövidülnek (m_N egy nukleon tömege), tehát kb. $\gamma \cdot 2E/m_N \cdot \rho_0 = 2\gamma^2\rho_0$

[2] Fenomenológiai érvek is sugallják ezt az energiasűrűséget: érdemes kiemelni a [61, 62] munkákat, ahol a különböző energiájú gyorsítók (BNL AGS, GSI SIS, CERN SPS, és később BNL RHIC) eredményeit vizsgálva adódik a következtetés, hogy egy adott, kb. 1 GeV-nyi energia jut minden keletkezett nukleonra kifagyáskor (azaz amikor megszűnik a hadronok rugalmatlan szórása), nagymértékben függetlenül az ütközési energiától. Ez alapján is tehát az 1 GeV egy tipikus hadronikus energia, új fázist várhatunk, ha ennél nagyobb energia koncentrálódik egy tipikus nukleáris térfogatba, 1 fm^3-be.

a kialakuló energiasűrűség, ahol $\rho_0 = 0,14$ GeV/fm^3 a közönséges maganyag sűrűsége. (Pl. a RHIC $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es ütközéseire $E/m_N \simeq 107$, az eredmény itt $\simeq 3200$ GeV/fm^3.)

Igen nagy, bőven 1 GeV/fm^3 feletti értékek adódnak a kisebb energiájú (pl. az AGS gyorsítóban tanulmányozott) ütközéskre is. A probléma világos: ez alapján már sokkal a RHIC gyorsító működése előtt látni kellett volna a kvark-gluon-plazmára utaló jeleket a kísérletekben. Nyilvánvaló tehát, hogy a kapott energiaérték nem „valódi": a QCD fázisátmenete szempontjából az az érdekes, hogy mekkora az energiasűrűség akkor, amikor már lokálisan termalizált anyag jött létre. Ezt fogjuk „kezdeti energiasűrűségnek" hívni, és ε_0-val jelölni. Ennek ismerete alapvető fontosságú: így „helyezhetünk el" a QCD fizikai fázisdiagramján minden mérési eredményt[3].

A dolgozatban már többször említett Bjorken-becslés [46] egy széles körben használt módszer ε_0 megbecslésére: lényege, hogy a keletkezett hadronok midrapiditásnál (azaz $y = 0$ környékén) mért rapiditáseloszlás-értékét gyorsulásmentes mozgással követi vissza a kezdeti állapotba. Lényeges szempont, hogy a Bjorken-megoldás boost-invarianciája a rapiditáseloszlásra is y-tól független alakot jósol.

Teljesen nyilvánvaló, hogy a konstans $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ csak $y \simeq 0$ környékén érvényes közelítés lehet. Valóban, pl. a RHIC-nél a kísérletek feltárták, hogy noha $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ „lapos" $y = 0$ körül, de nagyobb $|y|$-ra csökkenni kezd. Az alábbiakban kiszámítjuk $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-t az egyik gyorsuló megoldásunk, a tetszőleges λ-ra érvényes (2.38) megoldás alapján. A boost-invariancia feltételezése mélyen beleivódott a hidrodinamikai parametrizációkba: a mi mostani modellünk nemcsak önmagában használható, de felfogható az általános longitudinális boost-invariáns tágulási profil általánosításának is. A fő következtetésünk az lesz, hogy ezzel a modellel le sikerül írnunk a mért $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-t, és kitűnik, hogy a Bjorken-becslés bizonyosan alulbecsüli ε_0-t.

Nagyon fontos látni, hogy ez utóbbi következtetés a modell részleteitől függetlenül érvényes: gyorsuló folyadékban egyrészt a nyomás munkát végez (vagyis az eredeti energiasűrűségnek a végzett munkától függően nagyobbnak kellett lennie), másrészt pedig a folyadékelemek eredeti térfogata kisebbnek adódik, mintha nem gyorsulva távolodtak volna, így ε_0 becslését erre is korrigálni kell. Az alábbiakban a hidrodinamikai modellünket használva mindkét korrekciós tényezőre becslést adunk az adatok alapján. A kapott eredmény az első, a Bjorken-becslésen túllépő analitikus becslés ε_0-ra, de fontos látni, hogy eredményeink a numerikus hidrodinamikai megoldásokban szereplő ε_0 értékek nagyságrendjébe esnek. Ezek mindig a Bjorken-becslésnél jelentősen nagyobb értékeket tesznek fel (lásd pl. a [68] eredményt.)

[3] Más eredmények is arra utalnak, hogy az előző kinematikai energiasűrűség-becslés nem realisztikus: ez ugyanis az ún. „*full stopping*" esetnek felelne meg, azaz amikor a bejövő magok teljesen lefékeződnek, és összes energiájuk hőenergiává alakul. Azonban kísérletileg látható, hogy „átlátszóak" a magok: sok nukleon csak kicsit meglökve áthalad a szembejövő atommagon, ezek energiája tehát nem jelenik meg a közeg termalizált energiájaként.

4.2. A rapiditáseloszlás kiszámítása

Az 1. fejezetben leírt módon a hidrodinamikai fejlődés végállapotában mérhető mennyiségeket termikus eloszlásból számítjuk ki. Felmerül a kérdés, hogy hogyan határozzuk meg a korábban (az 1. fejezetben) bevezetett $S(x,p)$ forrásfüggvényt, ha ismerjük a hidrodinamikai áramlást és a kifagyási felületet. A relativisztikusan invariáns eloszlásfüggvény $E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}$ alakú; olyan felírást kell keresnünk egy pontról pontra változó normálisú hiperfelületre, amely egyrészt relativisztikusan invariáns, másrészt ha a kifagyás egy adott rendszerben konstans t koordinátaidőben (a megfigyelő szerint „egyszerre") történik, akkor éppen $E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}$ adódjon az eloszlásfüggvényre. Ez indokolja az alábbi választást, amely Cooper–Frye-formula néven ismert [63]. Relativisztikus esetben ez úgy írható fel, ha bevezetjük a normális hiperfelület-elemet (vagyis a hiperfelület vektori integrálási mértékét) a $\mathrm{d}^D\Sigma_\mu(x)$ jelöléssel, ezzel a forrásfüggvény

$$S(x,p)\,\mathrm{d}^D x = \frac{g}{(2\pi\hbar)^D}\frac{p^\mu \mathrm{d}^D\Sigma_\mu(x)}{B^{-1}(x,p)+s_q}, \quad B(x,p) = \exp\left\{\frac{\mu(x)}{T(x)} - \frac{p^\mu u^\mu(x)}{T(x)}\right\}$$

alakba írható. A $B(x,p)$ a hidrodinamikai folyási képnek megfelelő lokális Boltzmann-eloszlás; $S(x,p)$-t úgy írtuk fel, hogy Maxwell–Boltzmann-, Fermi–Dirac- és Bose–Einstein-statisztika esetére is érvényes legyen (ezeknek rendre az $s_q = 0$, $+1$ és -1 értékek felelnek meg), g pedig a spin-degenerációs faktor, értéke $2s+1$, ahol s a részecske spinje. A $p^\mu \mathrm{d}^D\Sigma_\mu(x)$ négyesszorzat, a szűkebb értelemben vett Cooper–Frye-faktor pedig valóban egyszerűen a részecske energiájával való szorzásba megy át a „kifagyás nyugalmi rendszerében", ahol lokálisan $\mathrm{d}\Sigma^\mu$ párhuzamos az $(1,\mathbf{0})$ vektorral. (A $\mathrm{d}^D\Sigma_\mu(x)$ a felület mértéke.)

4.2.1. A λ-megoldás alkalmazása

A (2.38) egyenletben leírt λ-megoldást, mégpedig az $1+1$ dimenziós, $\kappa = 1$-re érvényes, tetszőleges λ-jú megoldást fogjuk használni, amikor a részecskeszámsűrűség, $n(x)$ „homogén", azaz a (2.46) egyenletben szereplő $\nu(A)$ függvény konstans 1. A kifagyási hiperfelületet pedig a következő előírással adjuk meg: a hőmérséklet $\eta = 0$-ban legyen adott T_f érték (az $_f$ index itt mindenhol a kifagyásnak megfelelő értékeket fogja jelölni), egyébként pedig a felület legyen pszeudoortogonális a négyessebeségmezőre: $u^\mu(x) \,||\, \mathrm{d}\Sigma_\mu(x)$. (Ez azt jelenti, hogy a kifagyás „szinkronizált": a folyadékkal együttmozgó megfigyelő számára lokálisan egyszerre történik a kifagyás.) Ez az előírás sok modellben előfordul, egyebek közt a Buda-Lund hidrodinamikai modellben is[4], (lásd az 1.3. szakaszt), amely sikeresen ír le több (más modell által

[4] A Buda-Lund modellben ezen előírás általánosítása is használható: a kifagyási folyamatot nem kell feltétlenül pillanatszerűnek tekintenünk. Bevezethetjük a hidrodinamikai áramlást jellemző lokális τ' sajátidőparamé-

nem jól reprodukált) mennyiség rapiditásfüggését, pl. a $v_2(\eta)$-t, az elliptikus folyást [64]. A Hwa-Bjorken-megoldásra (és a Hubble-féle tágulásra) az ezen a módon definiált felület persze egybeesik a $\tau = \tau_f = const$ felülettel.

A választott hidrodinamikai megoldást a kifagyási felület $\eta = 0$-hoz tartozó τ_f sajátidő-értékével, és a T_f, n_f kifagyáskori értékekkel írjuk fel (2.38) és (2.46) alapján:

$$T(x) = T_f \left(\frac{\tau_f}{\tau}\right)^{\lambda}, \quad n(x) = n_f \left(\frac{\tau_f}{\tau}\right)^{\lambda}, \quad u^{\mu} = (\mathrm{ch}\lambda\eta, \mathrm{sh}\lambda\eta). \tag{4.1}$$

Az erre a négyessebességmezőre pszeudoortogonális felület egyenlete

$$\left(\frac{\tau_f}{\tau}\right)^{\lambda-1} \mathrm{ch}\left((\lambda-1)\eta\right) = 1. \tag{4.2}$$

A kifagyáskor keletkező részecske p^{μ} impulzusát az y rapiditással $p^{\mu} = m_0(\mathrm{ch}y, \mathrm{sh}y)$ módon paraméterezhetjük, ahol m_0 a keletkezett részecske tömege. A termikus modellekkel egyszerre több fajta részecsketípus spektrumát is leírhatnánk, mindazonáltal — figyelembe véve, hogy a keletkező hadronok a vizsgált kinematikai tartományban nagyrészt pionok, és hogy a kísérletekben (a mi általunk a későbbiekben tekintett mérésekben is) igen gyakran csupán az inkluzív, nem azonosított hadronok rapiditáseloszlását mérik, nem követünk el nagy hibát, ha a képletet rögtön pionokra specializáljuk: ekkor $m_0 = 139$ MeV, és a g spin-degenerációs faktor 1 (hiszen a pion pszeudoskalár mezon). A kifagyási felület paramétere az η koordináta lehet, és felhasználva a $p^{\mu}u_{\mu}(x) = m_0\mathrm{ch}(\lambda\eta - y)$ összefüggést, az eddigiek alapján a Cooper-Frye-tényezőt (azaz az integrálási mértéket) is tovább alakíthatjuk:

$$\int \delta(x - x_f)\, p^{\mu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu}(x) \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta\, m_0\tau_f \mathrm{ch}(\lambda\eta - y)\, \mathrm{ch}^{\frac{1}{\lambda-1}-1}\left((\lambda-1)\eta\right). \tag{4.3}$$

Behelyettesíthetjük ezt, $T(x)$ és $u^{\mu}(x)$ alakjait (4.1)-ből, ill. a $\frac{g}{2\pi\hbar}e^{-\mu(x)/T(x)}$ tényezőt szokás szerint $\frac{n(x)}{T(x)}$-szel helyettesítve látszik, hogy ez konstans lesz. (Vagy másképpen érvelve: $\mu(x)/T(x)$-et egyszerűen konstansnak vesszük, nem hivakozva n-re, mint ahogy sokszor teszik.) Ezzel a kiszámítandó integrál a következő lesz:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta\, \frac{m_0\tau_f}{2\pi\hbar} \frac{\mathrm{ch}(\lambda\eta - y)}{\mathrm{ch}^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}\left((\lambda-1)\eta\right)} \exp\left\{-\frac{m_0}{T_f}\mathrm{ch}(\lambda\eta - y)\, \mathrm{ch}^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\left((\lambda-1)\eta\right)\right\}. \tag{4.4}$$

tert (azaz a folyadékelemek világvonalai mentén mért sajátidőt, ami csak a Hwa-Bjorken-típusú áramlásoknál egyezik meg a τ Rindler-koordinátával), melynek definíciója a $\left.\frac{\partial\tau'}{\partial t}\right|_{\mathbf{r}=const} = u^0(x)$ egyenlet, és az (általánosított) Cooper-Frye-faktorra a $p^{\mu}\mathrm{d}^D\Sigma_{\mu}(x)\,\mathrm{d} = p^{\mu}u_{\mu}(x)\,H(\tau')\,\mathrm{d}^D x$ előírást tehetjük: ha a $H(\tau')$ függvény a $\tau' = \tau'_0$ kifagyási sajátidő körül koncentrált függvény (pl. Gauss-eloszlás), akkor egy időben kicsit „szétkent" kifagyási feltételt kapunk. Ilyen általánosítással az alábbi számolásokban nem foglalkozunk.

Mindeddig csak a longitudinális tágulással foglalkoztunk, a keletkező részecskéket is valódi $1+1$ dimenziós téridőben terjedőnek képzeltük. A választott $1+1$ dimenziós megoldásunk a transzverzális tágulást nem veszi figyelembe, mindazonáltal megtehetjük, hogy úgy képzeljük, hogy a tágulás valódi, $1+3$ dimenziós téridőben zajlik le, a longitudinális sebességprofilt a választott megoldás írja le, és a rendszer transzverz irányban teljesen homogén. Ekkor is meghatározhatjuk a rapiditáseloszlást, (4.4) helyett a következő képlettel:

$$E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\eta \, \frac{m_T \tau_f}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\mathrm{ch}\,(\lambda\eta - y)}{\mathrm{ch}^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}\left((\lambda-1)\,\eta\right)} \exp\left\{-\frac{m_T}{T_f}\mathrm{ch}\,(\lambda\eta - y)\,\mathrm{ch}^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}\left((\lambda-1)\,\eta\right)\right\}. \tag{4.5}$$

Ebben az összefüggésben a következő dolgok módosultak (4.4)-hez képest: a kapott mennyiség a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_z}$ rapiditáseloszlás helyett $E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}$, a teljes, háromdimenziós invariáns impulzuseloszlás. A $\frac{g}{2\pi\hbar}$ helyett $\frac{g}{(2\pi\hbar)^3}$ szerepel, továbbá az m_0 tömeg helyett most az $m_T = \sqrt{E^2 - p_z^2} = \sqrt{m_0^2 + p_x^2 + p_y^2}$ transzverz tömeg jelenik meg. Ahhoz, hogy (4.5)-ből megkapjuk a rapiditáseloszlást, integrálnunk kell a transzverz impulzusra (p_x-re és p_y-ra), amit m_T-re vett integrállal írhatunk fel:

$$E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y 2\pi m_T \mathrm{d}m_T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = 2\pi \int_{m_0}^{\infty} \mathrm{d}m_T \, m_T E \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}. \tag{4.6}$$

4.2.2. A rapiditáseloszlás közelítő analitikus alakja

A (4.4) ill. a (4.5) és a (4.6) képleteket egyszerűen kiértékelhetjük numerikus integrálással, mindazonáltal hasznos, ha legalább egy közelítő analitikus formulát felírunk. Abban a határesetben, amikor $\frac{m_0}{T_f}$ végtelenhez tart, (4.4) integrandusában az exponenciális tényező egyre „élesebb", Dirac-delta-szerű lesz. Ez adja az ún. nyeregponti integrálás ötletét: ha $f(x)$ és $g(x)$ olyan (sima) függvények, hogy $f(x)$-nek $x = x_0$-ban éles maximuma van, $g(x)$ pedig elegendően lassan változik x_0 környékén, akkor a szorzatuk integráljára a következő közetítést alkalmazhatjuk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x \simeq g(x_0)\, f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi f(x_0)}{-f''(x_0)}}. \tag{4.7}$$

Tulajdonképpen ez az a közelítés, amikor $g(x)$-et konstans $g(x_0)$-nak, $f(x)$-et pedig x_0 körüli éles Gauss-görbének gondoljuk, melynek paramétereit az f függvény és deriváltja határozza meg (ha f-nek tényleg maximuma van, a gyökjel alatt biztosan pozitív szám áll). A közelítés annál pontosabb, minél inkább hasonlít $f(x)$ egy Dirac-deltára (és határesetben egzakt lesz). Fontos megjegyezni, hogy ezek a képletek egzakt eredményt adnak Gauss-alakok szorzatának integráljára is, vagyis nem csak és kizárólag éles maximumú függvényekre, hanem Gauss-alakhoz közeli integrálokra is alkalmazhatóak. Ennek tudatában nem annyira meglepő, hogy (az alább tár-

gyalt numerikus tapasztalatok alapján) egészen jó közelítést kapunk (4.4)-re, noha pl. pionokra $\frac{m_0}{T_f} \simeq 0.7$, azaz semmiképpen sem tart végtelenhez.

A mi esetünkben a következőképpen közelítjük (4.4)-et:

$$f(\eta) \equiv \exp\left\{-\frac{m_0}{T_f}\mathrm{ch}(\lambda\eta - y)\,\mathrm{ch}^{\frac{\lambda}{\lambda-1}}((\lambda-1)\eta)\right\}, \quad g(\eta) \equiv \frac{m_0\tau_f}{2\pi\hbar}\frac{\mathrm{ch}(\lambda\eta - y)}{\mathrm{ch}^{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}}((\lambda-1)\eta)}.$$

Az f függvény η_1 maximuma és a nyeregpont-közelítéshez szükséges többi mennyiség a következőnek adódik:

$$\eta_1 = \frac{y}{2\lambda-1} \quad , \quad f(\eta_1) = \exp\left\{-\frac{m_0}{T_f}\mathrm{ch}^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right\} \quad , \quad \alpha \equiv \frac{2\lambda-1}{\lambda-1}, \tag{4.8}$$

$$\frac{f''(\eta_1)}{f(\eta_1)} = -\frac{m_0}{T_f}\lambda(2\lambda-1)\,\mathrm{ch}^{\frac{1}{\lambda-1}}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \quad , \quad g(\eta_1) = \frac{m_0\tau_f}{2\pi\hbar}\mathrm{ch}^{\frac{1}{\lambda-1}}\left(\frac{y}{\alpha}\right). \tag{4.9}$$

Az α paramétert a kényelem kedvéért vezettük be. Összerakva ezeket a következőt kapjuk:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = \mathcal{N}e^{\frac{m_0}{T_f}}\mathrm{ch}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\exp\left\{-\frac{m_0}{T_f}\mathrm{ch}^{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right\}, \quad \mathcal{N} = \sqrt{\frac{2\pi T_f}{m_0\lambda(2\lambda-1)}}\frac{m_0\tau_f}{2\pi\hbar}e^{-\frac{m_0}{T_f}}. \tag{4.10}$$

Úgy írtuk fel a képletet, hogy az $\mathcal{N}$ normálási tényező éppen $\left.\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}$, a rapiditáseloszlás $y=0$ midrapiditás-beli értéke legyen. Ez tehát a közelítő analitikus képletünk az $1+1$ dimenziós esetre érvényes (4.4) integrálra.

A transzverz szabadsági fokokat is figyelembe vevő (4.5) integrál közelítése hasonló:

$$E\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}^3\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{2\pi T_f}{m_T\lambda(2\lambda-1)}}\frac{m_T\tau_f}{(2\pi\hbar)^3}\mathrm{ch}^{\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\exp\left\{-\frac{m_T}{T_f}\mathrm{ch}^{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right\}.$$

A $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ kiszámolásához szükséges m_T szerinti integrált is egy egyszerű közelítést alkalmazva végezhetjük el. A

$$\int_{x_0}^{\infty} h(x)\exp\{-\beta x\}\,\mathrm{d}x \simeq \frac{h(x_0)}{\beta}$$

közelítés akkor használható, ha $x_0 \gg \frac{1}{\beta}$, és $h(x)$ simán változik x_0 körül. Esetünkben a $h(m_T) = m_T^{3/2}$ függvényről van szó, és ha $T_f \ll m_0$, akkor teljesül a közelítés feltétele. (Ez a feltétel ugyanaz, mint a nyeregponti közelítés alkalmazhatóságának feltétele.) Az $1+3$ dimenziós esetben végeredményünk tehát:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = \mathcal{N}'e^{\frac{m_0}{T_f}}\mathrm{ch}^{-\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\exp\left\{-\frac{m_0}{T_f}\mathrm{ch}^{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right\}, \quad \mathcal{N}' = \sqrt{\frac{2\pi m_0 T_f^3}{\lambda(2\lambda-1)}}\frac{Am_0\tau_f}{(2\pi\hbar)^3}e^{-\frac{m_0}{T_f}}. \tag{4.11}$$

ahol A a folyadékáramlás transzverz kiterjedése. Itt is igaz, hogy $\mathcal{N}' = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}$. Eltekintve eme normálási tényező különbözőségétől, látszik, hogy ez a (4.10) képlethez nagyon hasonló. Összefoglaló formulánk tehát:

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0} \mathrm{ch}^{\pm\frac{\alpha}{2}-1}\left(\frac{y}{\alpha}\right) \exp\left\{-\frac{m_0}{T_f}\left(\mathrm{ch}^{\alpha}\left(\frac{y}{\alpha}\right)-1\right)\right\}, \tag{4.12}$$

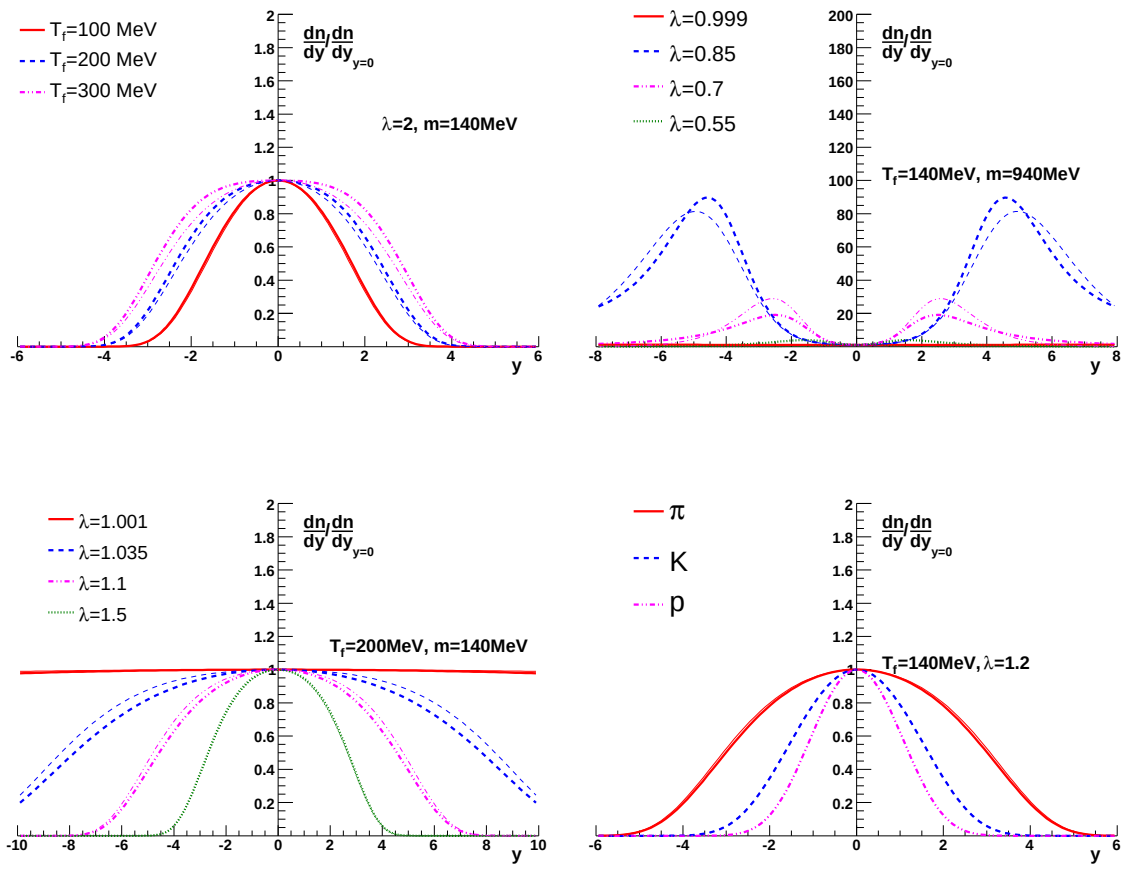
itt tehát a felső előjel vonatkozik a tisztán $1+1$ dimenziós, míg az alsó a háromdimenziós térbe beágyazott esetre. A $\lambda = 1$ Hwa-Bjorken-eset határátmenettel megkapható: ekkor a rapiditáseloszlás valóban $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=0}$ konstans, amint azt el is várjuk. Hasznos továbbá, ha felírjuk az $y = 0$-ban vett második derivált segítségével a Gauss-alaknak tekintett eloszlás „szélességét" is:

$$\Delta y^2 = \frac{\alpha}{m_0/T_f \mp 1/2 + 1/\alpha}, \tag{4.13}$$

Látszik, hogy $\Delta y^2 = \infty$ ha $\lambda = 1$, vagy ha $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{T_f}{2m_0 \mp T_f + T_f}\right)$, azaz Δy^2 előjelet válthat λ változtatására. A $\lambda = 1$ esetben az eloszlás konstans, míg a másik gyök esetében nem az, de csak másodiknál magasabb deriváltjai nem tűnnek el $y = 0$-ban. Ha $\Delta y^2 > 0$, akkor az eloszlásnak $y = 0$-nál maximuma van, egyébként minimuma. Fenomenológiai szempontból mindenképpen a $\Delta y^2 > 0$ eset a jelentősebb.

A 4.1. ábrán ezen képletek illusztrációját láthatjuk: kiszámoltam néhány önkényesen választott λ értékre, illetve rögzített λ-ra, a T_f kifagyási hőmérsékletet ill. a keletkező részecske típusát (azaz tömegét) variálva kapott 1-re normált rapiditáseloszlásokat. Jól látható, hogy ilyen tipikus T_f és m_0 értékekre és $\lambda > 1$-re az analitikus képlet mintegy 10%-os hibával használható. (A $\lambda < 1$ eset nem fizikai, lassuló megoldásoknak felelne meg.) A következőkben a (4.12) képletet fogjuk alkalmazni néhány (a RHIC gyorsítónál mért) adat leírására. Előtte azonban ide kívánkozik egy megjegyzés: nem tudjuk pontosan, hogy mennyire változik meg a kapott képlet (a (4.12) egyenlet) attól, ha másképp választjuk a sebességmezőt, a T hőmérsékletet, a kifagyási hiperfelületet, stb[5]. Kérdés tehát, hogy általános esetben mit mondhatunk a rapiditáseloszlás és a gyorsulás kapcsolatáról. Az, hogy ha a tágulás longitudinális irányban gyorsuló, azt eredményezi, hogy $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ végesnek adódik (eltérően a Hwa-Bjorken-megoldásból adódó konstans, boost-invariáns Bjorken-esettől), minden bizonnyal általánosabb esetekben is igaz, nemcsak a most tárgyalt egyszerű (és analitikusan végigkövethető) megoldásra. Ennek indoklása a következő lehet. A Bjorken-esetben a tágulás boost-invariáns, azaz egy y rapiditással

[5] Az előző fejezetből emlékezhetünk, hogy a választott megoldás „ütközésmentes áramlás", ez alapján azt gondolnánk, hogy a kiszámolt rapiditáseloszlás egyáltalán nem függ a kifagyási felülettől. Ennek feltételei itt azonban nem teljesülnek, mivel egyrészt nem tömegtelen részecskék keletkezését vizsgáljuk, másrészt a p_T-re vonatkozó integrált is elvégezzük.



4.1. ábra. Normált rapiditáseloszlások a (2.38) alatti $1+1$ dimenziós megoldásból számolva, különböző λ, T_f és m_0 értékekre. A vastag vonal a (4.5)–(4.6) egyenletek numerikus integrálásából, a vékony vonal a (4.11) közelítő képletből kapható.

mozgó és egy álló megfigyelő ugyanazt látja, ezért $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ nyilván konstans. Gyorsuló tágulás esetén ésszerű feltételezni, hogy egy mozgó megfigyelő olyan áramlást lát, amely jobban „széttartó", mint amilyet az $y = 0$-val mozgó (álló) megfigyelő lát. (Pl. az $\eta = y$ helyen a folyadékelem sebessége nagyobb lesz, mint $\mathrm{th}\eta$, vagyis az $\eta = 0$-jú és $\eta = y$-ú pont gyorsabban távolodik egymástól, mint a Bjorken-esetben.) Ilyen esetben tehát a mozgó megfigyelő rendszerében a számára nem midrapiditású folyadékelemek jobban „szétszórják" a keletkező részecskéket, mint az álló megfigyelő látja: vagyis összességében kevesebb részecske keletkezik $y \neq 0$-ban, mint $y = 0$-ban, tehát $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-nak $y = 0$-ban maximuma lesz. (Egyúttal magyarázatot kapunk a (4.1). ábrán $\lambda < 1$ esetén látható, ezzel ellentétes viselkedésre is: ha a tágulás lassul (ez a helyzet a λ-megoldásoknál $\lambda \leq 1$ esetben), várható, hogy a rapiditáseloszlásnak nem maximuma, hanem minimuma lesz $y = 0$-ban.) Ez az egyszerű érvelés persze nem egzakt eredmény, csak

szemléltetése annak, hogy tényleg a kapotthoz hasonló eredményt várhattunk.

4.3. A nehézion-reakciók kezdeti energiasűrűsége

4.3.1. A Bjorken-becslés

Először röviden összefoglaljuk Bjorken eredeti gondolatmenetét [46]. A központi rapiditástartományban felszabadult energiát a részecskék közvetlenül megmért p_T transzverz impulzusából számolhatjuk: a transzverz tömeg definíciója $m_T = \sqrt{p_T^2 + m_0^2}$, ezzel az energia $E^2 = m_T^2 + p_z^2$ lesz, ezt tekintjük a reakciózóna termalizált energiatartalmának.

Válasszunk ki az ütközési zónában létrejövő (termalizált) anyagból egy vékony szeletet midrapiditásnál! Ez egy vékony hengerhez hasonló, R sugara az ütköző hadronok vagy nukleonok sugarával közelíthető: centrális ütközéseknél $R = 1,18A^{1/3}$ fm, ahol A az ütköző mag tömegszáma, a henger térfogata tehát $(R^2\pi)\tau \mathrm{d}\eta$, ahol a magasságot $\tau \mathrm{d}\eta$ alakba írtuk, itt $\mathrm{d}\eta$ a szeletnek megfelelő téridőrapiditás-tartomány, τ pedig a megfigyelés sajátideje. A vizsgált szelet energiatartalma $\mathrm{d}E = \langle m_T \rangle \mathrm{d}n$, ahol $\mathrm{d}n$ a részecskék száma, $\langle m_T \rangle$ pedig a részecskék átlagos transzverz tömege. A kezdeti energiasűrűség tehát

$$\varepsilon_0 = \frac{\langle m_T \rangle}{(R^2\pi)\tau_0} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta_0}, \tag{4.14}$$

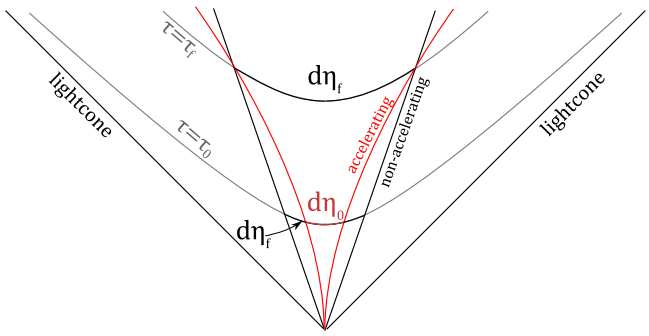
itt most speciálisan $\mathrm{d}\eta_0$ a szelet termalizációkor mérhető szélessége, τ_0 pedig a termalizáció ideje. Bjorken eredeti becslése $\tau_0 \simeq 1$ fm volt, manapság is ezt szokták használni, amikor az energiasűrűséget ezzel a módszerrel becslik.

A Bjorken-becslésben a lényeges további specializáció az, ahogyan az η_0-t összeköti a kifagyáskori η_f mennyiséggel, illetve ezt a keletkező részecskék y rapiditásával: a Hwa-Bjorken-féle gyorsulásmentes boost-invariáns megoldásban egyszerűen $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta_0} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$, és itt már a megfigyelt részecskék $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ végső rapiditáseloszlása szerepel. Ilyenkor $\eta_0 = \eta_f$, azaz $\mathrm{d}\eta_0 = \mathrm{d}\eta_f$, ami azt fejezi ki, hogy a folyadék-szelet nem változtatja η-beli szélességét a tágulás során, valamint a boost-invariancia miatt szimbolikusan $\eta_f = y$-et írhatunk.

A becslés tehát:

$$\varepsilon_0^{(Bj)} = \frac{\langle m_T \rangle}{(R^2\pi)\tau_0} \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}. \tag{4.15}$$

Ennek meghatározásához tehát $\langle m_T \rangle$-t és $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-t kell megmérni. A $\tau_0 = 1$ fm/c-re vonatkoztatott értékét hívják Bjorken-becslésnek. A kísérletek általában így számolják ki a létrejövő energiasűrűséget.



4.2. ábra. Illusztráció a λ-megoldásokra vonatkozó $\frac{\mathrm{d}\eta_f}{\mathrm{d}\eta_0}$ faktorhoz: a Bjorken-esetben ez 1, ha a folyadék gyorsul, a térfogatelem gyorsabban tágul, mint a Hwa-Bjorken-esetben.

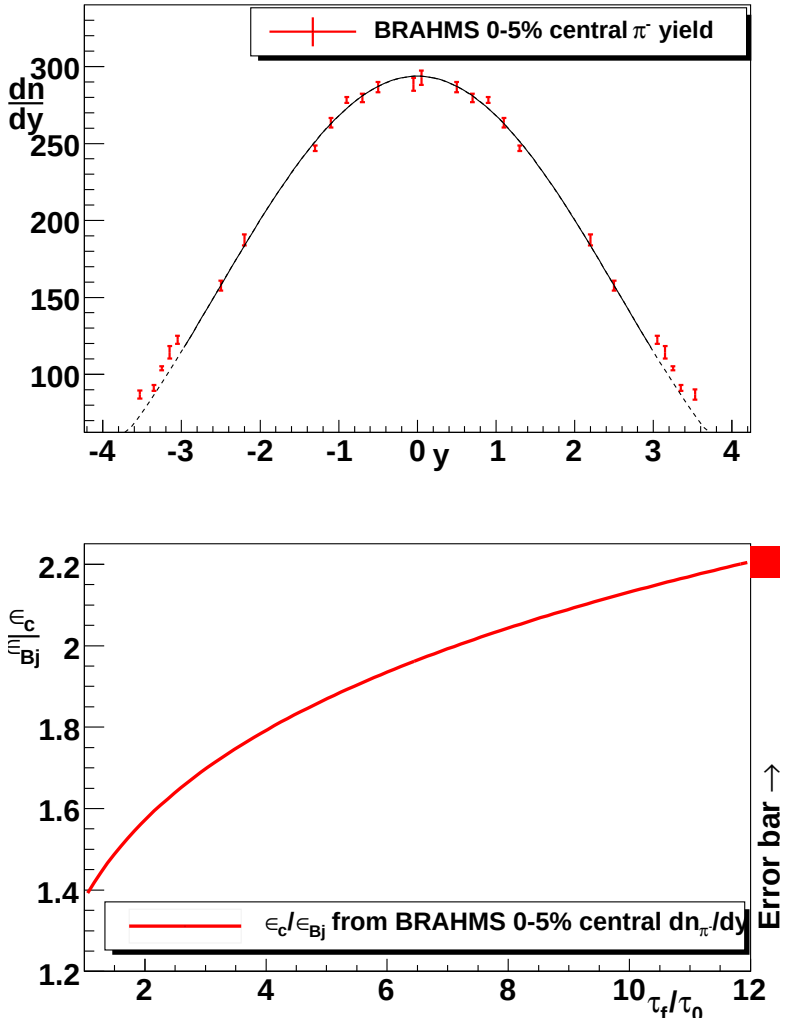
4.3.2. A Bjorken-becslés pontosítása a gyorsulás figyelembevételével

Ha a longitudinális gyorsulás nem nulla, módosítani kell az előző gondolatmenetet. Ekkor írhatjuk, hogy $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta_0} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}\frac{\partial y}{\partial \eta_f}\frac{\partial \eta_f}{\partial \eta_0}$. A $\frac{\partial \eta_f}{\partial \eta_0}$ tényező azt fejezi ki, hogy a midrapiditás környéki folyadékelemek tágulnak η-ban: a mi λ-megoldásunkban erre azt találjuk, hogy $\frac{\partial \eta_f}{\partial \eta_0} = \left(\frac{\tau_f}{\tau_0}\right)^{\lambda-1}$. (Ezt úgy láthatjuk be, hogy az $A(\tau,\eta)$ skálázófüggvényt, melynek konstans értékei a trajektóriákat paraméterezik, két midrapiditás-közeli η értéknél követjük nyomon τ_f és τ_0 között. A (2.43) egyenlet alapján $\eta \simeq 0$ környékén $A = (\lambda-1)\left(\tau_0/\tau_f\right)^{\lambda-1}\eta$, ebből leolvasható $\frac{\partial \eta_f}{\partial \eta_0}$ értéke.) A 4.2. ábra azt illusztrálja, hogy a gyorsulás hogyan befolyásolja ezt a tágulást. A másik tényező, $\frac{\partial y}{\partial \eta_f}$ is eltér 1-től, ami azt jelenti, hogy az η_f téridőrapiditásnál kifagyó folyadékelemből keletkezett részecskék nagy része $y \neq \eta_f$ rapiditásnál jelenik meg. Ezt a faktort (4.8)-ból kaphatjuk: $\frac{\partial y}{\partial \eta_f} = 2\lambda - 1$. (Amit ott η_1-ként, azaz adott y-hoz tartozó messze legvalószínűbb η értékként kiszámoltunk, annak ez a fizikai értelme).

Ha $\lambda > 1$, azaz a tágulás gyorsuló, mindkét tényező nagyobb, mint 1, amint azt várjuk: $\frac{\partial \eta_f}{\partial \eta_0}$ valóban azt írja le, hogy a tágulás mennyire tér el a Bjorken-félétől a gyorsulás miatt, $\frac{\partial y}{\partial \eta_f}$ pedig arról árulkodik, hogy mennyi munkát végzett a nyomás a rendszeren. Ha tehát $\lambda > 1$, a Bjorken-módszer *alulbecsüli* a kezdeti ε_0 energiasűrűséget. A pontosabb becslésünk tehát a következő:

$$\varepsilon_0^{(c)} = \frac{\partial \eta_f}{\partial \eta_0}\frac{\partial y}{\partial \eta_f}\varepsilon_0^{(Bj)} = \left(\frac{\tau_f}{\tau_0}\right)^{\lambda-1}(2\lambda-1)\,\varepsilon_0^{(Bj)}. \tag{4.16}$$

Lássunk egy példát ezen megfontolások gyakorlati alkalmazására! A RHIC gyorsító BRAHMS kísérlete megmérte $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-t $-3,5 < y < 3,5$ tartományban. Ebben (mint más hidrodinamikai modellek tesztelésénél is) csak a $-3 < y < 3$ tartományt tekintjük, mivel ennél nagyobb rapiditásoknál már a keletkező részecskék jelentős része származik az ütköző magoknak az ütközésben részt nem vevő részeinek (az ún. spektátoroknak) a fragmentációjából. A 4.3. ábra felső részén



4.3. ábra. Fent: BRAHMS $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ adatok [65] illesztése a (4.11) képletünkkel. Lent: az energiasűrűség Bjorken-becsléshez képesti korrekciója τ_f/τ_0 függvényében.

a BRAHMS kísérlet egyik $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ mérését [65] illesztem a fentebbi (4.11) képletünkkel. Az adatok a RHIC maximális ütközési energiájára, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-re vonatkoznak, $0-5\%$-os centralitású (azaz legcentrálisabb) eseményekre. Mint azt várjuk, λ nagyobbnak adódik 1-nél. Az illesztéshez előre meg kellett adni T_f-et és m_0-t: tipikusan pionokról lévén szó, $m_0 = 140$ MeV-et vettünk. A T_f-et 200 MeV-nek vettük, a következő okokból. A valódi kifagyási hőmérséklet sokkal inkább a (rács-QCD-számolások alapján is a fázisátmeneti hőmérsékletnek gondolt, és a hidrodinamikai modellekben is használt) $T_0 \simeq 170$ MeV környékén van. A kisimpulzusú részecskék p_T-spektrumát $\frac{1}{p_T}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_T} \simeq e^{-m_T/T_{eff}}$ módon paraméterezve azonban a T_{eff} effektív hőmérsékletre ennél magasabb érték adódik: különböző fajta részecskék mért spektrumának

összehasonlításából az derül ki, hogy a $T_{eff} = T_0 + m_0 \langle u_T \rangle^2$ összefüggés közelítőleg igaz, ahol $\langle u_T \rangle$-vel a transzverz tágulási sebesség átlagát jelöltük, m_0 pedig (mint eddig is) a vizsgált részecsketípus tömege. (Ez lényegében a Doppler-effektus: az $m_0 \langle u_T \rangle^2$ tag azt bizonyítja, hogy a részecskék táguló tűzgömbből keletkeznek [34, 66].) Pionokra a megmért (és e modell által $\langle u_T \rangle \simeq 0,5$-re jól visszaadott) T_{eff} kb. 200 MeV-nek adódik: ezt használva vehetjük figyelembe longitudinális modellünkben a transzverz dinamikát.

Ezekkel a paraméterekkel végrehajtva az illesztést az eredmény $\lambda = 1,18 \pm 0,01$-nek adódik. A 4.3. ábra jobb oldalán láthatjuk, hogy a (4.16) képlet alapján hogyan módosul az energiasűrűség-becslésünk a Bjorken-becsléshez képest. Ez utóbbi értéke a vizsgált $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ adatsort is szolgáltató $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV-es ütközésekre $\varepsilon_{Bj} = 5$ GeV/fm^3 [6]. A τ_f/τ_0-ra 8 ± 2-t véve tehát azt kapjuk, hogy a becsült kezdeti energiasűrűség $\varepsilon_c = (2,0 \pm 0.1)\,\varepsilon_{Bj} = 10,0 \pm 0,5$ GeV/fm^3. A megadott hiba a λ-illesztés statisztikus hibájának hibaterjedéséből adódik, valójában módszerünk szisztematikus hibái ennél jóval nagyobbak. A feltett T_f hőmérsékletet ésszerű határok (pl. 180 MeV és 220 MeV) között változtatva λ-ra $1,16 - 1,20$ között változó értékeket kapunk, ez az energiasűrűség-becslés bizonytalanságában legalább $\pm 10\%$ hibát okoz, hasonlóan τ_f/τ_0 ésszerű határok közötti változtatása is.

Hasonló korrekciós tényezőt alkalmazhatunk minden centralitás-osztályban. A 4.4. ábra bal oldalán a BRAHMS kísérlet különböző centralitásoknál végrehajtott $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta}$ méréseit láthatjuk. Ahhoz, hogy ezeket illeszthessük, végre kell hajtani a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} \to \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta}$ transzformációt. Ehhez mindenképpen kell valami feltevést tenni a transzverz dinamikára. Mi a már említett Buda-Lund-modell analitikus képleteit használtuk[6] [29, 30]: ezek az átlagos transzverz impulzus enyhe rapiditásfüggését is figyelembe veszik, és jól illeszthetők más rapiditásfüggő mérési adatokhoz [18]. (Megjegyezzük, hogy a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta}$ függvény akkor is „kétcsúcsú" szerkezetű, ha a megfelelő $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ rapiditáseloszlásnak $y = 0$-nál maximuma van; a 4.4. ábrán látott alak tehát nem keverendő össze a $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ alakjának a 4.1. ábrán $\lambda < 1$-re látott nemfizikai lehetőségeivel.)

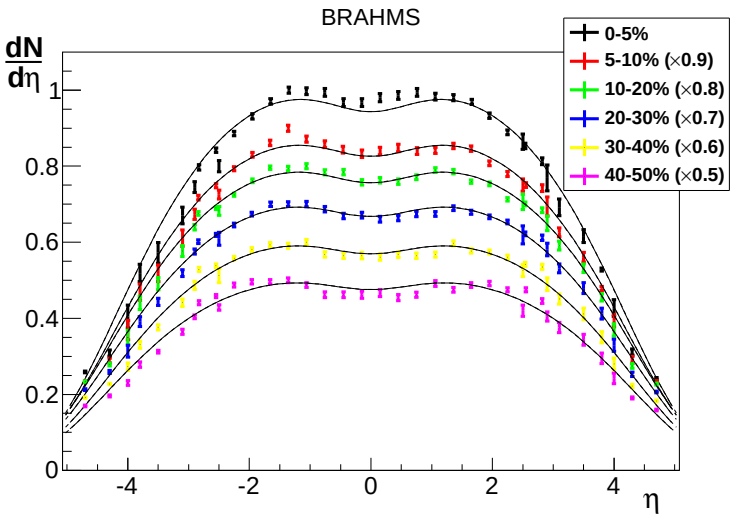
[6] A mondott transzformáció lényege, mely a hivatkozott [29, 30] cikkekben részletesen megtalálható, a következő: az (1.1) képletből látszik az összefüggés a kétszer differenciális eloszlások között, amiből közelítőleg írhatjuk, hogy

$$\frac{E}{p}\frac{1}{p_T}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_T\mathrm{d}\eta} = \frac{1}{p_T}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}p_T\mathrm{d}y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta} \simeq \frac{\overline{p}}{\overline{E}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y} = \frac{\overline{p}_T \mathrm{ch}\eta}{\sqrt{m^2 + \overline{p}_T^2 \mathrm{ch}^2\eta}}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y},$$

ahol $\overline{E}$, $\overline{p}$, $\overline{p}_T$ a részecskék (akár rapiditásfüggő) átlagos energiája, impulzusa és transzverz impulzusa, és felhasználtuk az η definíciójából adódó $p = p_T \mathrm{ch}\eta$ képletet. $\overline{p}_T$ értékére $\simeq 0,25$ GeV/c adódik, pontos alakja a Buda-Lund-modellben a következő:

$$\overline{p}_T = \frac{T_{eff}}{1 + \frac{\sigma^2}{2}y^2}, \quad \sigma^2 = \frac{T_0 T_{eff}}{m_0^2\left(\Delta y^2 + \frac{T_0}{m_0}\right)}, \quad T_{eff} = T_0 + \frac{m_0 \langle u_T \rangle^2}{1 + \frac{m_0}{T_0}}.$$

Itt a T_{eff} effektív hőmérsékletet kell 200 MeV-nek választanunk, és az illesztés során a rapiditáseloszlás Δy szélességét az előző illesztési eredmények alapján konstans 3-nak vettem.



4.4. ábra. Normált BRAHMS $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\eta}$ mérési adatok [67] különböző centralitásokra, a (4.11) képletünkkel illesztve. Az eredmény lényegében ugyanaz, mint a rapiditáseloszlás illesztésénél ($\lambda \simeq 1,18$), kevésbé centrális ütközésekre enyhén csökkenő λ-val.

A becsléseink közelítő jellegűek. Két dolgot azonban fontos kiemelni. Egyrészt, hogy az ε_0-ra most kapott eredmény konzisztens más későbbi mérésekkel, amelyek szintén indirekt módon kapcsolódnak ε_0-hoz. Egy példa a PHENIX kísérlet mérése az ütközőzónából kirepülő alacsony impulzusú *direkt fotonok* (azaz olyan fotonok, melyek nem más részecskék, pl. π^0 bomlásából származnak) spektrumára [19]. A $p_T \lesssim 1$ GeV/c impulzusú fotonok spektruma exponenciális, ennek csökkenéséből a kezdeti hőmérsékletre $\simeq 300 - 600$ MeV adódik: ha a kifagyási energiasűrűség $\simeq 1$ GeV/fm^3, és a hőmérséklet $T_f = 170$ MeV, akkor ilyen magas kezdeti hőmérséklet esetén biztos, hogy az energiasűrűség nagyobb, mint a Bjorken-becsléssel kapott 5 GeV/fm^3 (még ha $\kappa = 3$-nak megfelelő adiabatikus tágulással számolunk is, akkor is $\varepsilon \geq 10\mathrm{GeV/fm}^3 \cdot (300/170)^4$). Ez a mérés tehát konzisztens a ε_0-ra vonatkozó predikciónkkal.

A másik megjegyzés, hogy minél inkább eltérünk a modellünktől, annál nagyobb becsült energisűrűséget kapunk: pl. ha a tágulás nemegyensúlyi folyamatokon keresztül is zajlik, vagy ha figyelembe vesszük azt, hogy a valóságban κ biztosan 1-nél jóval nagyobb[7]. Ez utóbbi effektust úgy tudnánk valósághűen modellezni, ha $\kappa \neq 1$-re is találnánk realisztikus, elliptikus gyorsuló tágulást leíró hidrodinamikai megoldásokat, amiből kiszámolhatnánk erre az esetre is az adatokkal összehasonlítható mennyiségeket, pl. $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-t. Egyelőre ilyen megoldás nem ismert, mégis megpróbálhatjuk megbecsülni $\kappa \neq 1$-re ε_0 értékét, a következő módon (noha ezzel, az egzakt eredményeket analitikusan „kiterjesztve” olyan területre jutunk, ahol a becslésünket csak numerikus eredményekkel összevetve ellenőrizhetjük). Néhány általános feltételt megfogalmaz-

[7] Mint mondani szokták, a $\kappa = 1$ állapotegyenlet túl *kemény*.

hatunk az energiasűrűség becslésére, ezek a következők:
(i) Egyrészt a Bjorken-becslés ($\lambda = 1$-re) független κ-tól, amit vissza kell kapnunk.
(ii) Másrészt tudjuk (4.16) alapján a $\kappa = 1$, $\lambda \neq 1$ esetre érvényes becslést: ezt vissza kell, hogy kapjuk a $\kappa \to 1$ határesetben.
(iii) Harmadrészt általánosan jellemző a $p = nT$ állapotegyenletű egzakt tágulós megoldásokra (is), hogy az energiasűrűség $\varepsilon \propto \left(\frac{V_0}{V}\right)^{1+\frac{1}{\kappa}}$ módon csökken bennük (valamilyen jellemző V térfogat függvényében; ez egyszerűen az adiabatikus tágulás következménye), és a térfogat a τ egy hatványával arányos (aszimptotikusan legalábbis). Ez alapján tehát a kezdeti energiasűrűség τ_f/τ_0-tól hatványfüggvény-alakban függ, és a kitevőben $\frac{1}{\kappa}$ jelenik meg.
(iv) Végül pedig tudhatjuk, hogy (kvark-gluon-plazma és hadrongáz állapotegyenletet és ezek közti átmenetet feltételező) numerikus hidrodinamikai szimulációk is alkalmasak $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$ leírására RHIC energiákon (egy példa erre a $2+1$ dimenziós, tengelyszimmetrikus [68] számolás). Ilyen esetekben mindenhol a BRAHMS által megadott $\varepsilon_0^{(Bj)}$ Bjorken-becslésnél jóval (az említett hivatkozásban 4-szer) nagyobb kezdeti energiasűrűséget tesznek fel. Tehát elmondhatjuk, hogy κ realisztikusabb (vagyis 1-nél nagyobb) választása (és a transzverz tágulás realisztikusabb figyelembevétele) felfele korrigálja ε_0 becsült értékét[8].

Ezek alapján (mintegy az Occam borotvája-elvet alkalmazva) olyan képletet keresünk, ami $\lambda \neq 1$-re és $\kappa \neq 1$-re is vonatkoztatható, és konzisztens az előző feltételekkel. A legegyszerűbb ilyen választás a következő becslés:

$$\frac{\varepsilon_0^{(\kappa)}}{\varepsilon_0^{(Bj)}} = (2\lambda - 1)\left(\frac{\tau_f}{\tau_0}\right)^{(\lambda-1)\left(2-\frac{1}{\kappa}\right)} \tag{4.17}$$

Ez alapján $\kappa = 3$-ra az előzőekhez képest még nagyobb korrekció adódik a Bjorken-becsléshez: a BRAHMS adatok alapján $\varepsilon_0 \simeq 2,9 \cdot \varepsilon_0^{(Bj)} \simeq 14,5$ GeV/fm^3 értéket kapunk. Ez T-ben $T_0 \simeq 2T_c \simeq 340$ MeV-nek felel meg, ami szintén összhangban van a PHENIX direkt foton méréssel (melyet a becslésünknél később, 2010-ben publikáltak).

4.3.3. A nehézion-reakciók kollektív mozgásának élettartama

Röviden szólunk a longitudinális gyorsulás figyelembevételének egy másik alkalmazásáról. Az, hogy a λ paraméter a kísérleti adatok szerint 1-nél nagyobb, nemcsak az energiasűrűség becslését befolyásolja: egy további érdekes mennyiség az, hogy mennyi „idő” (vagyis az $\eta = 0$ rapiditású, tehát a longitudinális tágulás szempontjából álló folyadékelemben mérve mennyi saj-

[8] Ez abból is kikövetkeztethető, hogy nagyobb κ-ra adott p-hez nagyobb ε tartozik, így adott nyomásgradiensekhez, azaz adott munkavégzéshez (ami a gyorsulás mértékéből leolvasható) nagyobb kezdeti energiasűrűség kell.

átidő) telik el a termalizációtól kezdve a kifagyásig. Ennek meghatározására a Hwa-Bjorken-féle hidrodinamikai képben dolgozva Sinyukov és Makhlin adott egy módszert [69], amely összeköti a kifagyáskor mért mennyiségeket az eltelt τ_f sajátidővel és a kétrészecske-korrelációk impulzustérbeli „sugarával”:

$$R_{long} = \sqrt{\frac{T_f}{m_T}}\tau_f \quad \Rightarrow \quad \tau_f = \sqrt{\frac{m_T}{T_f}}R_{long}. \tag{4.18}$$

Itt m_T a mért részecskék (mérhető) átlagos transzverz tömege, T_f a kifagyási hőmérséklet (amit modellekből kell venni), R_{long} pedig a Bose-Einstein-korrelációs függvény (mérhető) hosszanti sugárparamétere (ennek segítségével a kétrészecske-korrelációs függvény longitudinális része $C\left(p_z^{(1)}, p_z^{(2)}\right) \simeq \exp\left\{-\left(p_z^{(1)} - p_z^{(2)}\right)^2 R_{long}^2\right\}$ módon írható[9]). Ebben a számolásban Hwa-Bjorken-szerű gyorsulásmentes tágulást tettek fel. Ha a tágulás gyorsuló, a trajektóriák becsült közös origója eltolódik a gyorsulásmentes esethez képest. (Ezt pl. [70, 71]-ben is kimutatták). Midrapiditásnál vizsgálva a λ-megoldásunkat a következő eredményt kapjuk (széles, de véges rapiditáseloszlásra, azaz $(\lambda - 1)$-ben vezető rendben):

$$R_{long} = \sqrt{\frac{T_f}{m_T}}\frac{\tau_f}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \tau_f = \lambda\tau_f^{(Bj)}, \tag{4.19}$$

ahol $\tau_f^{(Bj)}$-vel jelöltük az eredeti Sinyukov-Makhlin-becslést. Az előzőekben látott, $\sqrt{s_{NN}} =$ 200 GeV energiájú ütközésekre érvényes $\lambda \simeq 1,18$ értékből tehát az eredeti becsléshez képest mintegy 18%-os többletet kapunk τ_f értékére.

* * *

Az itt vizsgált kísérleti eredmények a RHIC gyorsítótól származnak. Az LHC gyorsítónál vizsgált nagyobb energiájú ($\sqrt{s_{NN}} = 0,9$ TeV, $\sqrt{s_{NN}} = 2,36$ TeV, $\sqrt{s_{NN}} = 7$ TeV) ütközésekre is megadták már ε_0 Bjorken-becsléssel kapott értékét [72]: $\varepsilon_0 \sim 16$ GeV/fm^3. Ennek korrigálására az itteni módszer minden bizonnyal ugyanígy alkalmazható. Az első LHC mérési eredmények csak most[10] kezdenek megjelenni $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}y}$-ról kellően nagy y rapiditás– (vagy η pszeudorapiditás–)tartományon [72]. A sejtés mindazonáltal az volt (és látható is az adatokon), hogy — mivel nagyobb ütközési energián közelebb vagyunk a Bjorken-féle végtelen energiás, boost-invariáns határesethez — szélesebbek a rapiditáseloszlások, emiatt kevésbé kell korrigálni a Bjorken-megoldáson alapuló becsléseket. Mindazonáltal korrigálni kell: az LHC-nél is biztosan nagyobb energiasűrűség alakul ki, mint a Bjorken-becslés szerinti érték. A tágulási

[9] Ez az ún. LCMS koordinátarendszerre igaz, amiben az összimpulzus z-komponense eltűnik: $p_z^{(1)} + p_z^{(2)} = 0$.
[10] 2012-ben.

munkavégzést is figyelembevevő becslésünk alapján tehát azt láthatjuk, hogy már a RHIC-nél is kialakult olyan energiasűrűség, amit eredetileg az LHC-re vártak a Bjorken-becslés alapján.

Az egyre nagyobb ütközési energiákhoz képest másik irányba is elindult a nehézionfizikai kutatás: miután a RHIC-nék kiderült, hogy a $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energia bőven elég ahhoz, hogy létrejöjjön a kvark-gluon-plazma, érdekes kísérleti kérdéssé vált, hogy kialakulásához legalább mekkora energia kell, ill. hogy megtalálható-e a QCD kritikus pontja, ahol az eddig megfigyelt (ún. crossover típusú) folytonos átmenet elsőrendű fázisátalakulásba vált. Ezen kérdések vizsgálatához $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV nukleononkénti energiánál kisebb energiájú ütközések kellenek. (A RHIC gyorsító programjában szerepel ilyen ütközések vizsgálata: ha a kritikus pont $\mu_B = 600$ MeV-nél kisebb bariokémiai potenciálnál található, a RHIC esélyes ennek felfedezésére. A németországi FAIR gyorsítót[11] speciálisan ilyen vizsgálatokra tervezik: ha a QCD kritikus pontja a $\mu_B > 600$ MeV tartományban van, akkor ez a gyorsító találhatja meg azt.)

Az ilyen, alacsonyabb energiájú ütközésekre is elengedhetetlen ε_0 kísérleti ismerete, és, mint láttuk, kisebb ütközési energián (ahol a boost-invariancia egyre rosszabb közelítés) nagyobb különbség van a Bjorken-becslés és az itt bemutatott, realisztikusabb becslés között. Tehát módszerünknek az alacsonyabb energiájú ütközések fizikájában is érdekes kísérleti alkalmazásai lehetnek még.

[11] A FAIR 2012. márciusi tervek szerint 2018-ban indul.

5. fejezet

Összefoglalás

Ebben a rövid fejezetben először tézispontok formájában összefoglalom a dolgozatban bemutatott eredményeket, ezután megemlítek néhány lehetséges jövőbeni kutatási irányt.

5.1. Tézispontok

1. A Hwa-Bjorken-féle hidrodinamikai megoldás általánosításaként megtaláltam az első olyan, a nagyenergiás reakciók fenomenológiájához illeszkedő relativisztikus hidrodinamikai megoldásosztályt, ahol a termodinamikai mennyiségek és a sebességprofil a téridőkoordináták explicit és egyszerű függvényei, továbbá a sebességprofil nemeltűnő gyorsulású. Ilyen tulajdonságú megoldások korábban nem voltak ismertek. Mint egy bonyolult csatolt nemlineáris egyenletrendszer megoldásai, ezek a megoldások önmagukban, matematikai fizikai értelemben is érdekesek. Egyik lehetséges alkalmazásuk a numerikus hidrodinamikai módszerek tesztelése [50, 51].

2. A relativisztikus kinetikai egyenlet és a hidrodinamikai egyenletek szimultán vizsgálatával bebizonyítottam, hogy léteznek olyan folyási- és hőmérsékletprofilok, amelyek egyszerre relativisztikus hidrodinamikai megoldások és a nekik megfelelő fázistérbeli termikus eloszlásfüggvény kielégíti az ütközésmentes Boltzmann-egyenletet. Ezekben az esetekben a folyásban résztvevő részecskék lokális termikus eloszlása a mikroszkopikus ütközések szerepétől függetlenül fennmaradhat, akár nemeltűnő gyorsulású kollektív mozgás esetén is. Megtaláltam az összes ilyen tulajdonságú relativisztikus hidrodinamikai megoldást [58].

3. Az ütközésmentes új megoldások általánosításaként megtaláltam az első gömbszimmetrikusnál általánosabb szimmetriájú és forgó egzakt relativisztikus hidrodinamikai megoldásokat. További realisztikus egzakt megoldásokat tartalmazó osztályt is találtam, amely alkalmas

véges térbeli kiterjedésű rendszerek leírására. A forgó áramlási profilok azért is jelentősek, mert a nemcentrális nehézion-ütközésekben a keletkezett anyagnak nemzérus impulzusmomentuma van, és az általam talált megoldások az ilyen tűzgolyó tágulásának leírására, az impakt paraméter szerepének analitikus vizsgálatára lehetnek használhatóak [58].

4. A RHIC $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV tömegközépponti energiájú arany-arany ütközéseiben a longitudinális (nyalábirányú) kollektív folyási képet az egyik újonnan talált, paraméteres gyorsuló megoldással modellezve numerikusan is és analitikus közelítő formulával is kiszámítottam a reakcióban keletkező töltött hadronok rapiditás– és pszeudorapiditás-eloszlását. A BRAHMS együttműködés által megmért kísérleti adatsorokkal való összehasonlításból megállapítottam, hogy ez az egyszerű modell jól illeszthető a mért adatokhoz: a gyorsulás figyelembevétele teszi lehetővé az eloszlás véges szélességének leírását. Az illesztéssel meghatároztam a longitudinális gyorsulás paraméterét, és ezen eredmény alkalmazásaként továbbfejlesztettem és lényegesen pontosítottam a nehézion-reakciók kezdeti energiasűrűségének becslését. A folyás gyorsuló voltát (azaz a gyorsulás közben végzett munkát) is figyelembe vevő új becsléssel a RHIC gyorsító maximális, $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV energiájú Au+Au ütközéseire (a Bjorken-becsléssel kapott 5 GeV/fm^3 helyett) $\varepsilon = 10 \pm 0.5$ GeV/fm^3 értéket kaptam. Egy általánosabb állapotegyenletekre vonatkozó sejtéssel ehhez a becsléshez képesti további másfélszeres növekményt kaptam a kezdeti energiasűrűségre [50, 51].

5.2. Kitekintés

Az egzakt megoldások keresése izgalmas elméleti munka; számtalan módon való próbálkozás volt szükséges a dolgozatban leírt eredmények eléréséhez. Itt csak azokat hoztam elő, amelyek sikeresnek bizonyultak. A dolgozatban kifejtett megoldásosztályok sok szempontból lezártnak tekinthetők. A továbbiakban azonban érdekes lenne pl. olyan egzakt megoldásokat találni a relativisztikus hidrodinamika egyenleteire, amelyek általánosabb, ellipszoidális szimmetriájúak, hiszen ezek illeszkednének legjobban egy nehézion-ütközés geometriájához. Fontos lenne más, általánosabb állapotegyenleteket is vizsgálni.

A kezdeti energiasűrűség ismerete fontos a reakciókból kapott kísérleti adatok elméleti értelmezése szempontjából, ahhoz, hogy a mérési pontokat el tudjuk helyezni a hőmérséklet-barionsűrűség diagramon. Az erre kapott (2008-ból származó) eredmények összhangban vannak a PHENIX kísérlet 2010-ben publikált mérésével, amely az arany-arany ütközésekben kialakuló kvark-gluon-plazma hőmérsékletét a direkt fotonok spektrumából határozza meg, és azt mutatják, hogy már a RHIC gyorsító energiáin kb. 15 GeV/fm^3 kezdeti energiasűrűséget, amelyet eredetileg az LHC-re vártak. A RHIC-re vonatkozóan pedig megerősíthetjük a Bjorken-féle

becsléssel kapott adatra alapozott következtetést: a kialakuló energiasűrűség messze a fázisátalakulás kritikus értékének tekintett kb. 1 GeV/fm^3 érték felett van.

Röviden megemlítek néhány, a közölt eredmények publikálása óta, vagy azokkal egyidejűleg megjelent újdonságot. Érdekes fejlődés ment végbe az 1+1 dimenziós áramlások tanulmányozása terén: sikerült olyan módszert találni, amivel analitikusan interpolálni lehet a Landau– és a Bjorken-féle hidrodinamikai kép között [73]. A módszer további általánosításaként sikerült a Landau-Khalatnikov-megoldást (implicit formában) az állapotegyenletek egy szélesebb osztályára kiterjeszteni, és az 1+1 dimenziós tágulás során az entrópiaprodukcióra általános összefüggéseket felírni [74]. A [75] munka egy félanalitikus leírását adja a longitudinális dinamikának: egy együttmozgó koordinátarendszerben többféle egzakt megoldást ír fel; a módszer hátulütője, hogy több dimenzióban nehézkesen működik, és még egy dimenzióban is a használt speciális koordinátarendszerre való áttérés nagyon bonyolult. Említést érdemel még a Bjorken-megoldás konform szimmetriájú transzverz síkbeli dinamikával való kiterjesztése [76] is.

Érdeklődésre tartanak tehát számot a numerikus hidrodinamikai modellezés mellett az analitikus eredmények is. A végső cél mindenesetre mindkét esetben a szemünk előtt lebeg: megtalálni az adatok leírására megbízhatóan használható, minden szempontból kielégítő hidrodinamikai modellt a nagyenergiás nehézion-reakciók időfejlődésére. Az, hogy ez egyáltalán lehetséges, nem magától értetődő, és ezen alapul a paradigmaváltás, melynek következtében ma már nem kvark-gluon-plazma gázról, hanem inkább tökéletes kvarkfolyadékról beszélünk. A modellek további finomításától a kezdeti feltételek és az ütközésekben keletkezett anyag állapotegyenletének és egyéb jellemzőinek egyre pontosabb megismerését várhatjuk. Ebbe a folyamatba illeszkednek az ebben a dolgozatban leírt eredmények is.

Köszönetnyilvánítás

Ezen munkámat a T038406, T049466, NK73143 és NK101438 számú OTKA pályázatok támogatták.

Először is köszönök minden segítséget, bátorítást, építő vitát, és nem utolsósorban tanulási lehetőséget témavezetőmnek, Csörgő Tamásnak, aki mindig mellettem állt. Köszönök minden bátorítást és tanácsot az összes egyetemi és KFKI RMKI-beli tapasztaltabb kollégámnak. Fiatalabb kollégáim, barátaim közül ki szeretném emelni Csanád Mátét, Vértesi Róbertet és Lukács Árpádot, akikre mindig számíthattam, ebben a munkámban is és más kutatási témákban is.

Hálás vagyok egész családom, szüleim, testvéreim, és az összes jó barátom lelki-fizikai támogatásáért, őnélkülük esélyem sem lett volna idáig eljutnom. És nagyon-nagyon köszönök mindent menyasszonyomnak, Lindának, aki nélkül kevesebb ember, egy kívülálló lennék.

A. függelék

Kiegészítések az egzakt relativisztikus megoldásokhoz

A.1. A λ-megoldások

A 2.3. szakaszban láttuk az új, ebben a dolgozatban λ-megoldásoknak nevezett hidrodinamikai megoldásokat: a sebességmezőt és a nyomást a (2.38) egyenletek adják meg, a megoldás csak akkor érvényes, ha λ állandó, és λ, κ, D és az ott bevezetett Φ_λ paraméter a 2.1 táblázatban található értékeknek felelnek meg. Ebben a szakaszban egyfajta unicitás-bizonyítást láthatunk erre a megoldásosztályra, a főszövegben nem említett általánosabb esetben is. Konkrétan azt látjuk be, hogy ha (mint eddig is) $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenletet teszünk fel, és feltesszük, hogy a sebességmező gömbszimmetrikus és $v = \mathrm{th}\Omega$, $\Omega = \lambda(\tau)\eta$ alakú, akkor ebben az általánosabb osztályban is a 2.3. szakaszban megadottak az egyedüli megoldások (azaz τ-függő λ-t megengedve sem kaphatunk új megoldásokat).

Rindler-koordinátákban dolgozunk, a hidrodinamikai egyenletek (2.5)–(2.6) alatti formáját használhatjuk, melyek a v sebesség és a p nyomás helyett az ott bevezetett Ω és Q mennyiségekre vonatkoznak, ahol $v = \mathrm{th}\Omega$, $Q = \frac{1}{\kappa+1}\ln\frac{p}{p_0}$. A τ helyett kényelmes a $\zeta = \ln(\tau/\tau_0)$ változót használni. Az $\Omega(\tau,\eta) = \lambda(\zeta)\eta$ feltevést behelyettesítve a következőre jutunk:

$$\mathrm{ch}\left((\lambda-1)\eta\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\eta + \frac{\partial Q}{\partial\eta}\right) + \mathrm{sh}\left((\lambda-1)\eta\right)\left(\lambda + \frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right) = 0, \tag{A.1}$$

$$\mathrm{ch}\left((\lambda-1)\eta\right)\left(\lambda + \kappa\frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right) + \mathrm{sh}\left((\lambda-1)\eta\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\eta + \kappa\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right) + \frac{D-1}{\mathrm{sh}\eta}\mathrm{sh}\left(\lambda\eta\right) = 0. \tag{A.2}$$

Feltesszük, hogy a keresett hidrodinamikai megoldás olyan, hogy $\eta = 0$ körül a Q mennyiség sorbafejthető η szerint. Megvizsgáljuk az előző egyenletek η-ban negyedrendű sorát. Q-t így

írjuk[1]:

$$Q(\zeta,\eta) = A(\zeta) + \frac{C(\zeta)}{2}\eta^2 + \frac{G(\zeta)}{4}\eta^4 + \dots \tag{A.3}$$

A ζ argumentumot innentől nem írom ki, a vessző ζ szerinti deriváltat jelöl, és a $\beta \equiv \lambda - 1$ jelölést használom. Az (A.1)-et η-ban harmadrendig, (A.2)-t η-ban negyedrendig fejtünk sorba[2], ez elég lesz: tovább is mehetnénk, de ezekből már elég követelmény származik, ami a lehetséges megoldásokat korlátozza, és ha ezeket konkrétan megtaláljuk, akkor már a sorfejtés további tagjaiból adódó egyenletek is nyilván teljesülni fognak.

Abból a követelményből, hogy az η-ban különböző fokú tagok egyenként is kielégítsék az előző egyenleteinket, öt feltételt kapunk az ismeretlen β, A, C és G függvényekre:

$$\kappa A' + D(\beta+1) = 0, \tag{A.4}$$

$$\beta' + C + \beta(\beta + 1 + A') = 0, \tag{A.5}$$

$$G + (\beta' + C)\frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2}C' + \frac{\beta^3}{6}(\beta + 1 + A') = 0, \tag{A.6}$$

$$\frac{\beta^2}{2}(\beta + 1 + \kappa A') + \beta(\beta' + \kappa C) + \frac{\kappa}{2}C' + \frac{D-1}{6}\beta(\beta+1)(\beta+2) = 0, \tag{A.7}$$

$$\frac{\beta^4}{24}(\beta + 1 + \kappa A') + \frac{\beta^3}{6}(\beta' + \kappa C) + \frac{\kappa}{4}G' + \kappa\beta G +$$
$$\frac{\kappa}{4}\beta^2 C' + \frac{D-1}{360}\beta(\beta+1)(\beta+2)\left(3\beta^2 + 6\beta - 4\right) = 0. \tag{A.8}$$

A következő átalakításoknak csak a lényegét írom le. A $\beta = 0$ esetnek az ismert Hwa-Bjorken-Hubble-megoldás felel meg. Egyéb esetben feltesszük, hogy $\beta \neq 0$, és β-val mindenhol egyszerűsítünk. Az (A.4)-ből, (A.5)-ből és (A.7)-ből kapjuk a β-ra vonatkozó (A.9) egyenletet, továbbá az (A.4)–(A.8)-ból, kiejtve előbb A'-t, majd C-t, C'-t és végül G-t, kaphatjuk a szintén csak β-t tartalmazó (A.10) egyenletet:

$$\frac{\kappa}{2}\beta'' + (\kappa - 1)\beta^2(\beta+1) + \frac{\kappa-1}{2}(4\beta+1)\beta' =$$
$$\frac{D-1}{3}\beta(\beta+1)(2\beta+1) + \frac{D-1}{2}(2\beta+1)\beta', \tag{A.9}$$

[1] Az η-ban páratlan rendű tagokat egyből elhagytam, (A.1)-ből egyszerűen belátható, hogy el kell tűnniük.
[2] Az egyik Taylor-sor, amit használnunk kell, a következő:

$$\frac{\mathrm{sh}(\lambda\eta)}{\mathrm{sh}\eta} = \lambda + \frac{1}{6}\lambda\left(\lambda^2 - 1\right)\eta^2 + \frac{\lambda\left(\lambda^2-1\right)\left(3\lambda^2-7\right)}{360}\eta^4 + \mathcal{O}\left(\eta^6\right).$$

$$(\kappa-1)\left\{\frac{\beta\beta''}{4}+\frac{\beta'^2}{2}+\frac{\beta\beta'}{2}+\frac{4}{3}\beta^2\beta'+\frac{\beta^3}{3}(\beta+1)\right\}=$$
$$=\frac{D-1}{90}(\beta+1)(2\beta+1)\left(15\beta'+6\beta^2+6\beta-2\right). \tag{A.10}$$

Ha $\kappa = D = 1$, az általános megoldást felírtuk a 2.4. szakaszban, ezért ezt az esetet most nem részletezem. (A $\kappa = D = 1$ esetben az előző egyenletek annyit adnak, hogy $\beta'' = 0$; a konstans β esetén túl lehetséges egy nem túl érdekes $\beta = K\zeta + K'$ megoldás is.) Egyéb esetekben viszont beláthatjuk, hogy β-nak ζ-ban konstansnak kell lennie. Az (A.9), (A.10) egyenleteket a $\kappa = 1$, $D > 1$ esetben vizsgálva a

$$\beta''=\frac{D-1}{3}(2\beta+1)\left(2\beta^2+2\beta+3\beta'\right),\quad 15\beta'+6\beta^2+6\beta-2=0 \tag{A.11}$$

egyenleteket kapjuk[3]. A második egyenlet deriváltjából β''-t kifejezve és az első egyenletbe helyettesítve, és ezt összehasonlítva a második egyenlettel egyszerűen látható, hogy β-ra algebrai egyenlet adódik, vagyis β mindenképpen konstans. Akkor is ez derül ki, ha $\kappa \neq 1$, ebben az esetben a számolás kicsit hosszadalmasabb, de a fő lépések hasonlóak, mint az előbb: (A.9)-ből β''-t be kell helyettesíteni (A.10)-be, ekkor egy másodfokú egyenlet adódik β'-re, amiből kifejezhető β', mint β függvénye. Ebből deriválással kaphatunk egy kifejezést β''-re csak β függvényeként, amit összehasonlítva (A.9)-cel (miután ott is behelyettesítettük β'-t β-val kifejezve), kiderül, hogy β-ra mindenképpen egy algebrai egyenletet kapunk.

Arra következtethetünk tehát, hogy csak a konstans β esetek érdekesek. Ekkor (A.9)-ből és (A.10)-ből ezek az algebrai egyenletek maradnak[4]:

$$\frac{D-1}{3}(2\beta+1)-(\kappa-1)\beta=0,\quad (\kappa-1)\frac{\beta^3}{3}=\frac{D-1}{45}(2\beta+1)\left(3\beta^2+3\beta-1\right). \tag{A.12}$$

Most már egyszerűen kiderül, hogy öt eset lehetséges. Mindegyiknél le kell még persze ellenőrizni, hogy valóban megoldást kapunk (tehát a teljes hidrodinamikai egyenletekre, nemcsak az itt vizsgált sorfejtésükre). Kiderül, hogy valóban így van, és a Q-ra vonatkozó egyenlet minden esetben egyszerű egyenlet lesz, amit könnyű megoldani. A lehetőségek tehát:

1. A $\beta = 0$, azaz $\lambda = 1$ eset minden D-re és κ-ra megoldás: ez a a 2.1 táblázatban is látható (*d.* eset).

2. A $\kappa = D = 1$ esetben minden β megoldás. Ennek felel meg a 2.1 táblázat *e.* sora.

[3] Annak belátása során, hogy β konstans, mindenhol egyszerűsítünk β deriváltjait nem tartalmazó tényezőkkel; ha ilyenek nullák lennének, az egyből azt jelentené, hogy β algebrai egyenletet elégít ki, tehát konstans.

[4] $\beta+1$-gyel egyszerűsíthetünk, a $\beta+1=\lambda=0$ eset álló folyadéknak felelne meg. β-val is egyszerűsíthetünk, mert a $\beta = 0$ esetet már számításba vettük, ez a Hwa-Bjorken-Hubble-megoldás.

3. A $\kappa = 1$, $D \neq 1$ esetben láthatóan a $\beta = -1/2$ megoldás lehetséges (a táblázat „*b.*" sora).

4. Ha $\kappa \neq 1$, akkor az első egyenletet a másodikba helyettesítve β-ra másodfokú egyenletet kapunk. Ennek két megoldása $\beta = 1$ és $\beta = 1/2$, Az első egyenletből látszik, hogy a $\beta = 1$ (azaz $\lambda = 2$) eset akkor lehetséges, ha $\kappa = D$. (Ez ugye az ultrarelativisztikus ideális gáz állapotegyenlete.) Ezt a megoldást találtuk meg a 2.2. szakaszban, a 2.3. szakaszban pedig a 2.1 táblázat *a.* sorában hivatkoztunk rá.

5. Végül lehetséges a $\beta = 1/2$, azaz $\lambda = 3/2$ eset, ekkor $\kappa = \frac{4D-1}{3}$ kell, hogy legyen. Ez a 2.1 táblázatban a *c.* sorban szerepel.

A.2. A λ-megoldások fénykúpon kívüli analógjai

Ebben a szakaszban röviden levezetjük az előző szakaszban látott megoldásokhoz algebrailag némileg hasonló, a fénykúpon kívül érvényes megoldásokat. A fénykúpon kívül a $\tilde{\tau}$, $\tilde{\eta}$ koordinátákat a (2.39) egyenletben vezettük be:

$$t = \tilde{\tau}\mathrm{sh}\tilde{\eta}, \quad r = \tilde{\tau}\mathrm{ch}\tilde{\eta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\mathrm{sh}\tilde{\eta}\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} + \frac{\mathrm{ch}\tilde{\eta}}{\tilde{\tau}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\eta}}, \quad \frac{\partial}{\partial r} = \mathrm{ch}\tilde{\eta}\frac{\partial}{\partial\tilde{\tau}} - \frac{\mathrm{sh}\tilde{\eta}}{\tilde{\tau}}\frac{\partial}{\partial\tilde{\eta}}. \tag{A.13}$$

Hasonlóan, mint az előző szakaszban, most is gömbszimmetrikus, és $v = \mathrm{th}\Omega$, $\Omega = \lambda\tilde{\eta}$ módon paraméterezett sebességmezővel próbálkozunk, konstans λ-val. Az Euler-egyenletből és az energiamegmaradási egyenletből kapott, fénykúpon belül érvényes (A.1) és (A.2) egyenletek megfelelői a következők (a $\zeta = \ln\tilde{\tau}/\tilde{\tau}_0$ jelöléssel):

$$\mathrm{sh}\left((\lambda-1)\,\tilde{\eta}\right)\frac{\partial Q}{\partial\tilde{\eta}} + \mathrm{ch}\left((\lambda-1)\,\tilde{\eta}\right)\left(\lambda + \frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right) = 0, \tag{A.14}$$

$$\mathrm{sh}\left((\lambda-1)\,\tilde{\eta}\right)\left(\lambda + \kappa\frac{\partial Q}{\partial\zeta}\right) + \kappa\mathrm{ch}\left((\lambda-1)\,\tilde{\eta}\right)\frac{\partial Q}{\partial\tilde{\eta}} + \frac{D-1}{\mathrm{ch}\tilde{\eta}}\mathrm{sh}\left(\lambda\tilde{\eta}\right) = 0. \tag{A.15}$$

Ha $\lambda = 1$, akkor egyszerűen megtalálhatjuk az egyenletek megoldását:

$$\frac{\partial Q}{\partial\zeta} = -1, \quad \frac{\partial Q}{\partial\tilde{\eta}} = -\frac{D-1}{\kappa}\mathrm{th}\tilde{\eta}, \quad \Rightarrow \quad Q = -\zeta - \frac{D-1}{\kappa}\ln\mathrm{ch}\tilde{\eta}. \tag{A.16}$$

Az itt feltett $v = \mathrm{th}\tilde{\eta} = \frac{t}{r}$ sebességmező és az (A.16) kifejezéssel megadott Q-ból visszaszámolt p nyomás az a megoldás, amit a 2.3.2. szakasz (2.40) egyenletében a Hwa-Bjorken-Hubble-megoldás fénykúpon kívüli analógjaként írtunk le. Fontos megjegyezni, hogy Minkowski-koordinátákban kifejezve sem a sebességmező, sem a nyomás nem ugyanolyan alakú, mint a fénykúpon belüli esetben.

A $\lambda \neq 1$ esetben ugyanúgy járhatunk el, mint az előző szakaszban: sorbafejtünk az $\tilde{\eta} = 0$ vonal körül. (Ez a vonal itt egy kitüntetett rendszerben az origóval egyidejű események halmaza.) A Q kifejezése a következő:

$$Q(\zeta, \tilde{\eta}) = \tilde{A}(\zeta) + \tilde{B}(\zeta)\tilde{\eta} + \frac{\tilde{C}(\zeta)}{2}\tilde{\eta}^2 + \frac{\tilde{F}(\zeta)}{3}\tilde{\eta}^3 + \frac{\tilde{G}(\zeta)}{4}\tilde{\eta}^4 + \dots . \tag{A.17}$$

Az előző szakasz gondolatmenetéhez hasonlóan (A.14)-et sorbafejtjük $\tilde{\eta}$-ban negyedrendig, (A.15)-öt pedig harmadrendig. (Itt is kiderül, hogy elég idáig menni a sorfejtésben, ez már elegendő követelményt ad.) Könnyen kiderül, hogy $\tilde{B}(\zeta)$ és $\tilde{F}(\zeta)$ azonosan eltűnik, a többi feltétel pedig a következő (újra a kényelmes $\beta = \lambda - 1$ jelölést használva):

$$\beta + 1 + A' = 0, \tag{A.18}$$

$$\beta C + \frac{\beta^2}{2}(\beta + 1 + A') + \frac{C'}{2} = 0, \tag{A.19}$$

$$\beta(\beta + 1 + \kappa A') + \kappa C + (D-1)(\beta + 1) = 0. \tag{A.20}$$

$$\beta G + \frac{\beta^3}{6}C + (\beta + 1 + A')\frac{\beta^4}{24} + \frac{\beta^2}{4}C' + \frac{G'}{4} = 0, \tag{A.21}$$

$$\frac{\beta^3}{6}(\beta + 1 + \kappa A') + \frac{\kappa}{2}\beta C' + \kappa G + \frac{\beta^2}{2}C + \frac{D-1}{6}(\beta + 1)\left(\beta^2 + 2\beta - 2\right) = 0. \tag{A.22}$$

Mármost az (A.18)-at (A.20)-ba írva látszik, hogy C mindenképp konstans, ami alapján (A.19)-ből és (A.18)-ból $\beta \neq 0$ esetben $C = 0$ is következik, amivel, ha $\beta \neq 0$ és $\beta \neq -1$, (A.20) a

$$(\kappa - 1)\beta = (D - 1) \tag{A.23}$$

feltételt adja. Kihasználva, hogy $C = 0$, (A.21)-ből és (A.22)-ből, G kifejezésével pedig az a feltétel adódik, hogy

$$\frac{D-1}{3\kappa}\left(\beta^2 - 1\right) = 0. \tag{A.24}$$

Ez a két egyenlet már megszorítja a lehetséges megoldásokat. Két lehetőség marad: vagy $\beta = 1$ és $\kappa = D$, vagy $D = \kappa = 1$, és β tetszőleges.

A $\beta = 1$ (azaz $\lambda = 2$) eset pedig nem más, mint a (2.30) megoldás fénykúpon kívüli analógja, melynek alakja most (A.14)-ből és (A.15)-ből is megkapható:

$$v = \mathrm{th}2\tilde{\eta}, \quad Q = -2z \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{2tr}{t^2 + r^2}, \quad p = p_0\left(\frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\tau}}\right)^{2(\kappa+1)}. \tag{A.25}$$

A $\lambda = 1$ esettől eltérően ebben a $\lambda = 2$ esetben v és p kifejezése Minkowski-koordinátákban

ugyanaz a fénykúpon belül és kívül: mivel magát a megoldást először Minkowski-koordinátákban írtuk fel mindkét tartományban értelmes formában, nyilvánvaló, hogy itt is megkaptuk ezt.

Az az eset, amikor λ tetszőleges, de $D = \kappa = 1$, a már látott általános λ-ra érvényes egydimenziós megoldás (a 2.3.1. szakaszban lévő felsorolásban az e. eset) fénykúpon kívüli megfelelője:

$$v = \mathrm{th}\lambda\tilde{\eta}, \quad Q = -\lambda z \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \left(\frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\tau}}\right)^{2\lambda}. \tag{A.26}$$

Ezeket az eredményeket a 2.3.2. szakaszban foglaltam össze.

A.3. A gömbszimmetrikus Khalatnikov-egyenlet

A.3.1. A (2.30) megoldás levezetése

A 2.1.3. szakasz szerint a gömbszimmetrikus, (1.7) állapotegyenletű relativisztikus hidrodinamikai megoldások a (2.26) egyenletből kaphatók. Ez alapján gyakorlatilag egyértelműen le lehet vezetni a 2.2. szakaszban leírt új megoldást egy egyszerű követelményből. A már korábban is ismert, az 1.5. szakaszban említett és az ütközésmentességgel foglakozó 3.3. szakaszban a (3.14) egyenlettel felírt gömbszimmetrikus nemrelativisztikus megoldásra igaz a következő: elvileg bármilyen D dimenziószámú térben érvényes, és ha $\kappa = D/2$, (ami nemrelativisztikus ideális gázra vonatkozna), akkor a v sebességmező és a T hőmérséklet is pontosan ugyanolyan alakú minden D esetén. Relativisztikus esetben a $\kappa = D$ választás a természetes: megpróbálhatunk tehát olyan U függvényt találni, ami (2.26)-ot minden D-re kielégíti, ha $\kappa = D$. Behelyettesítés után látható, hogy ezzel a feltevéssel (2.26) két egyenletre esik szét:

$$(\text{ha } \forall\ D = \kappa - \text{ra } U \text{ ugyanaz}), \quad (\kappa - 1)\frac{\ddot{U}\dot{U}^2 + U''U'^2 - 2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2 - U'^2} = U'' + \frac{D-1}{r}U' - \ddot{U} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{U}\dot{U}^2 + U''U'^2 - 2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2 - U'^2} - \frac{U'}{r} = 0 \quad , \quad U'' - \ddot{U} = 0. \tag{A.27}$$

A második egyenletből rögtön látszik, hogy U egy kifutó és egy befutó „sugárirányú síkhullám” összege (nem gömbhullám, hiszen minden D-re ilyen, távolsággal nem lecsengő alakú):

$$U(t,r) = f(t+r) + g(t-r) = f(a) + g(b) \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{U'}{\dot{U}} = \frac{g' - f'}{g' + f'} = \frac{\frac{1}{f'} - \frac{1}{g'}}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{g'}}. \tag{A.28}$$

Ebben az A.3. szakaszban innentől az $a \equiv t + r$ és $b \equiv t - r$ jelölést használom, és f és g saját argumentumai szerinti deriváltjait jelölöm vesszővel (nem lesz összekeverhető az r szerinti

deriválással). Az itt még tetszőleges f és g függvényeket (A.27) első egyenlete szorítja meg. Behelyettesítve, kis átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{(f''+g'')\left(f'^2+g'^2\right)-\left(f'^2-g'^2\right)(f''-g'')}{2f'g'}=2\frac{f'-g'}{a-b}\quad\Rightarrow\quad\frac{a-b}{2}\left(\frac{f''}{f'^2}+\frac{g''}{g'^2}\right)=\frac{1}{g'}-\frac{1}{f'}.$$

Látszik, hogy érdemes áttérni az $F\equiv\frac{1}{f'}$ és $G\equiv\frac{1}{g'}$ függvényekre, amivel a feltételünk

$$(a-b)\left(F'+G'\right)=2\left(F-G\right)\quad\Rightarrow\quad\left(aF'-2F\right)-\left(bG'-2G\right)=bF'-aG' \tag{A.29}$$

alakú. Mivel a bal oldal egy a– és egy b-függő tag összege, a jobb oldalnak is ilyennek kell lennie. Ez alapján F' a-nak, G' pedig b-nek lineáris függvénye kell, hogy legyen. Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy

$$F'=2Ka+\gamma_1,\quad G'=2Kb+\gamma_2,\quad\Rightarrow\quad F\left(a\right)=Ka^2+\gamma_1a+\rho_1,\quad G\left(b\right)=Kb^2+\gamma_2b+\rho_2, \tag{A.30}$$

de visszahelyettesítve (A.29)-be kiderül, hogy $\gamma_1=\gamma_2\equiv\gamma$, $\rho_1=\rho_2\equiv\rho$ kell, hogy teljesüljön. Az (A.28) egyenletből így felírhatjuk a sebességet:

$$v=\frac{K\left(a^2-b^2\right)+\gamma\left(a-b\right)}{K\left(a^2+b^2\right)+\gamma\left(a+b\right)+2\rho}=\frac{2Ktr+\gamma r}{K\left(t^2+r^2\right)+\gamma t+\rho}. \tag{A.31}$$

Két értelmes lehetőség van: ha $K=0$ és $\gamma\neq0$, akkor a t koordináta eltolásával, azaz a $t\to t-\frac{\rho}{\gamma}$ helyettesítéssel v a Hubble-típusú sebességmező lesz. Ha $K\neq0$, akkor korábban ismeretlen megoldást kapunk: ezt a $t\to t-\frac{\gamma}{2K}$ helyettesítéssel tudjuk „standard” alakra hozni. Mindkét esetben könnyen meghatározhatjuk az $\dot{A}+vA'=0$ egyenletet kielégítő A függvényt. Tehát csak a következő két megoldásra igaz, hogy minden D-re $\kappa=D$ esetben érvényes:

$$v=\frac{r}{t},\quad A=\frac{r}{t},\qquad\text{ill.}\qquad v=\frac{2tr}{t^2+r^2+\rho},\quad A=\frac{r}{t^2-r^2+\rho}. \tag{A.32}$$

Ez utóbbi megoldás új eredmény, a 2.2. szakaszban a $\rho=0$ esetet vizsgáltuk (ez a 2.3. szakaszban látott $\lambda=2$ eset). A $\rho\neq0$ eset pedig a 3. fejezetben került elő, mint az ütközésmentes hidrodinamikai megoldások legáltalánosabb gyorsuló gömbszimmetrikus példája.

A.3.2. A (2.26) egyenlet (2.27) szerinti általánosítása

A 2.1.3. szakaszban megállapítottuk, hogy (2.26) helyett elég lehet a (2.27) egyenletet megoldani, ha csak a v sebességmezőt szereténk megtalálni. Ez utóbbi egyenlet ilyen alakú volt:

$$(\kappa-1)\frac{\ddot{U}\dot{U}^2+U''U'^2-2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2-U'^2}+\ddot{U}-U''-\frac{D-1}{r}U'=-\phi(U)\left(\dot{U}^2-U'^2\right). \tag{A.33}$$

Az előző gondolatmenetet erre az egyenletre is elvégezhetjük: kérdés, létezik-e olyan v sebességmezőjű hidrodinamikai megoldás, ami minden D dimenzióban ugyanolyan, ha $\kappa = D$. Ehhez elég olyan U-t keresünk, ami ugyan nem feltétlenül minden D-re megoldása (2.26)-nak, de minden D-re létezik $\phi_D(U)$, amire U megoldása (2.27)-nek. Az derül ki, hogy így is lényegében az előző megoldáshoz jutunk el. Ennek belátása kicsit hosszadalmasabb, a főbb lépéseket írom csak le. Adott D-re, $\kappa = D$-t beírva a (2.27) egyenlet így alakul:

$$(D-1)\left(\frac{\ddot{U}\dot{U}^2+U''U'^2-2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2-U'^2}-\frac{U'}{r}\right)+\ddot{U}-U''=\phi_D(U)\left(\dot{U}^2-U'^2\right). \tag{A.34}$$

Két különböző D_1 és D_2 dimenziószámot kombinálva könnyen látható, hogy ez csak akkor teljesülhet, ha találhatunk olyan $\chi(U)$ és $\psi(U)$ függvényeket, amikre

$$\frac{\ddot{U}\dot{U}^2+U''U'^2-2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2-U'^2}-\frac{U'}{r}=\chi(U)\left(\dot{U}^2-U'^2\right),\quad \ddot{U}-U''=\psi(U)\left(\dot{U}^2-U'^2\right). \tag{A.35}$$

A második egyenletről belátható, hogy azzal egyenértékű, hogy léteznie kell U egy olyan $\tilde{U}$ függvényének, amire $\ddot{\tilde{U}}-\tilde{U}''=0$. Erre az $\tilde{U}$-ra áttérve, ($\tilde{U}$-t átjelölve U-nak) az első feltétel lényegében nem változik, csupán esetleg egy másik $\tilde{\chi}(U)$ jelenik meg. Ott tartunk tehát, hogy ahhoz, hogy $v(r)$ minden D-re ugyanaz legyen, a következő egyenleteket kielégítő U függvény kell találnunk, ahol $\tilde{\chi}(U)$ tetszőleges:

$$\frac{\ddot{U}\dot{U}^2+U''U'^2-2U'\dot{U}\dot{U}'}{\dot{U}^2-U'^2}-\frac{U'}{r}=-\tilde{\chi}(U)\left(\dot{U}^2-U'^2\right),\quad \ddot{U}-U''=0. \tag{A.36}$$

A második feltétel megint sugárirányú síkhullámot ad (az előző szakaszhoz hasonlóan), amelyet visszahelyettesíthetünk az első feltételbe. Rögtön az előző szakaszban látott kényelmes jelöléseket használom ($F(a)$ és $G(b)$ egyváltozós függvények, $a = t + r$, $b = t - r$, a vessző pedig az egyváltozós függvények argumentumai szerinti deriváltat jelölik):

$$U=\int\frac{\mathrm{d}a}{F}+\int\frac{\mathrm{d}b}{G}\quad\Rightarrow\quad v=\frac{F-G}{F+G},\quad F'+G'-\frac{2(F-G)}{a-b}=\tilde{\chi}\left(\int\frac{\mathrm{d}a}{F}+\int\frac{\mathrm{d}b}{G}\right). \tag{A.37}$$

A $\tilde{\chi}$ függvény tetszőleges, mégis kaphatunk egy szükséges feltételt arra, hogy ez utóbbi összefüggés fennállhasson. Ha a illetve b szerint deriváljuk mindkét oldalt, akkor $\tilde{\chi}$ deriváltjára két kifejezést is kapunk, melyeknek konzisztenseknek kell lenniük. Ez már csak F-re és G-re jelent feltételt, ami egyúttal elégséges is: ha ezt teljesítik, a $\tilde{\chi}$ argumentumának és az őrá vonatkozó előző egyenlet bal oldalának ugyanazok a szintvonalai, tehát biztosan létezik egy megfelelő $\tilde{\chi}$ függvény, ami összekapcsolja őket. A mondott feltételt a következőképpen írhatjuk:

$$F\frac{\partial}{\partial a}\left\{F' + G' - 2\frac{F-G}{a-b}\right\} = \tilde{\chi}'\left(\int \frac{\mathrm{d}a}{F} + \int \frac{\mathrm{d}b}{G}\right) = G\frac{\partial}{\partial b}\left\{F' + G' - 2\frac{F-G}{a-b}\right\}, \tag{A.38}$$

amiből a csak F-et és G-t tartalmazó egyenlet:

$$(a-b)^2 FF'' - 2(a-b)FF' + 2F^2 = (a-b)^2 GG'' + 2(a-b)GG' + 2G^2. \tag{A.39}$$

Ennek részletes vizsgálatát nem vezetem itt végig. A módszer lényege, hogy mivel F és G egyváltozós függvények, csak jól meghatározott függés lehetséges (hasonlóan, mint az előző szakaszban az (A.29) egyenletnél láttuk). F^2 és G^2 egyforma alakú negyedfokú polinomnak (azaz argumentumaik ugyanolyan alakú polinomjának) adódik. Ezen polinom együtthatóira különböző megszorítások lesznek érvényesek, melyek arra vezetnek, hogy F és G mindenképpen vagy első–, vagy másodfokú polinom lesz. Végigszámolva a lehetséges eseteket kiderül, hogy ezekből (A.37) alapján kifejezve a sebességet végül is mindenképpen az (A.32) megoldások valamelyike adódik. Az ebben a szakaszban megvizsgált feltevéssel tehát nem jutunk érdekes új megoldásra. (Úgy tűnik, hogy a talált egyszerű megoldások ebben az értelemben egyediek.)

A.3.3. A Landau-Khalatnikov-megoldás

A teljesség kedvéért röviden ismertetem a (2.26) egyenlet első ismert megoldási módszerét, a ma Landau-Khalatnikov-megoldásként ismert megoldáshoz elvezető gondolatmenet [24]. Most a fénykúpváltozókat a és b helyett $x^{\pm} = t \pm r$ módon jelölöm. A (2.26) egyenletetben látható U potenciálfüggvényről könnyen belátható, hogy ha az $x^{\pm}$ fénykúpváltozókkal fejezzük ki, akkor $\xi^{\pm} \equiv \partial_{x^{\pm}} U = \frac{1}{2} T e^{\mp\Omega}$, ahol szokásosan $v = \mathrm{th}\Omega$, és bevezettük az új $\xi^{\pm}$ jelölést. Az $U(x^+, x^-)$ függvényről tehát Legendre-transzformációval áttérhetünk a $\chi(\xi^+, \xi^-)$ ún. Khalatnikov-potenciálra:

$$\chi\left(\xi^+, \xi^-\right) \equiv U\left(x^+, x^-\right) - x^+\xi^+ - x^-\xi^-, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \xi^{\pm}} = x^{\pm}. \tag{A.40}$$

$\xi^{\pm}$ helyett újra használhatjuk az Ω és a már látott $Q = \ln \frac{T}{T_0}$ változóinkat χ független változóiként, ezekre kell átírni a (2.26) egyenletet $1+1$ dimenzióban. Némi számolás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial Q^2} + (\kappa - 1)\frac{\partial \chi}{\partial Q} - \kappa \frac{\partial^2 \chi}{\partial \Omega} = 0. \tag{A.41}$$

Ez a Khalatnikov-egyenlet egyik ismert formája. Figyelemre méltó, hogy lineáris egyenletről van szó: a megoldása általános keretek között is felírható. Az $x^{\pm}$ koordinátákat a T és az Ω dinamikai mennyiségek függvényeként kapjuk, ezért beszélünk implicit megoldásról.

Az eredeti Landau-Khalatnikov-megoldás ebből úgy kapható, hogy a $\tilde{\chi} \equiv e^{(\kappa-1)/2}\chi$ változót használjuk, és az erre átírt (A.41) egyenlet Green-függvényét keressük: ez az I_0 Bessel-függvénnyel fejezhető ki. A részletes képletek megtalálhatók a [24, 74] hivatkozásokban: a lényeg, hogy ezek után kezdeti feltételként egy véges hosszúságú, nyugvó, homogén hőmérsékletű anyagdarabot választva kapjuk a Landau-Khalatnikov-megoldást, amiből azután közelítőleg Gauss-alakú rapiditáseloszlást lehet levezetni. De az implicit $x^{\pm} \leftrightarrow T, \Omega$ kapcsolat miatt nem lehet egyszerű képletekkel összekapcsolni a kezdő– és a végállapotot.

B. függelék

Kiegészítések az ütközésmentes áramlások vizsgálatához

B.1. A nemrelativisztikus eset

Ebben a szakaszban a (3.13) egyenlet megoldásait vizsgáljuk meg részletesen. (3.13)-ban a $\mathbf{p}$ impulzus különböző hatványait tartalmazó tagoknak külön-külön el kell tűnniük minden $\mathbf{p}$-re, ami a következő négy feltételt adja:

$$\nabla T = 0 \quad \left(p^3\right), \tag{B.1}$$

$$\delta_{kl}\frac{\partial T}{\partial t} - v_k\partial_l T - v_l\partial_k T + T\left(\partial_k v_l + \partial_l v_k\right) = 0 \quad \left(p^2\right), \tag{B.2}$$

$$\frac{1}{m_0 n}\nabla n - \frac{D/2}{m_0 T}\nabla T - \frac{\mathbf{v}}{T^2}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v^2}{2T^2}\nabla T + \frac{1}{T}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{1}{T}\nabla\frac{v^2}{2} = 0 \quad \left(p^1\right), \tag{B.3}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{D/2}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{m_0 v^2}{2T^2}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{m}{T}\frac{\partial}{\partial t}\frac{v^2}{2} = 0 \quad \left(p^0\right). \tag{B.4}$$

A hidrodinamikai egyenletek most használt alakjai pedig (melyek a $p = nT$, $\varepsilon = \kappa p$ behelyettesítésével adódnak az (1.18), (1.19), (1.20) egyenletekből):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\nabla\right)\mathbf{v} = -\frac{T}{m_0 n}\nabla n - \frac{1}{m}\nabla T, \tag{B.5}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{n}\left(\mathbf{v}\nabla\right)n + \frac{1}{T}\left(\mathbf{v}\nabla\right)T = -\frac{\kappa+1}{\kappa}\left(\nabla\mathbf{v}\right), \tag{B.6}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{n}\left(\mathbf{v}\nabla\right)n = -\left(\nabla\mathbf{v}\right). \tag{B.7}$$

A (B.1) szerint a hőmérséklet egyedül az idő függvénye, és emiatt mindenhol elhagyhatjuk a hőmérséklet gradiensét tartalmazó tagokat. Az állapotegyenletben a $\kappa = D/2$ választást tesszük[1]; könnyen belátható, hogy ekkor a (B.5)–(B.6) hidrodinamikai egyenletek kiadódnak (B.3)–(B.2) kombinációiként. (Ez speciális esete annak az általános eredménynek, amit a 3.2. szakaszban láttunk, miszerint a hidrodinamikai egyenletek következményei a lokális termikus eloszlásra felírt kinetikai egyenletnek.) Ezek alapján a (B.1)–(B.7) egyenletek közül bármelyik független egyenletcsoportot vizsgálhatjuk. A következőket választjuk:

$$T = T_0 \frac{a_0^2}{a^2(t)}, \tag{B.8}$$

$$\partial_k v_l + \partial_l v_k = 2\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\delta_{kl}, \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{T}{m_0 n}\nabla n, \tag{B.10}$$

$$\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{n}(\mathbf{v}\nabla)n = -(\nabla\mathbf{v}). \tag{B.11}$$

ahol $a(t)$ egyelőre tetszőleges függvény, a_0 pedig tetszőleges konstans. Ezeket (B.1) megoldására vezettük be, egyelőre mindenfajta fizikai jelentés nélkül.

Mostantól a háromdimenziós esetre koncentrálunk. Komponensenként vizsgálva a (B.9) egyenletet kiderül, hogy ez $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ alakját két egyelőre tetszőleges időfüggő $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{D}(t)$ vektor erejéig teljesen meghatározza[2]:

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{r} + \mathbf{C}(t)\times\mathbf{r} + \frac{\mathbf{D}(t)}{a(t)}. \tag{B.12}$$

Ha most belyettesítjük a sebességmező a (B.12) kifejezését a (B.10) egyenlet rotációjába, és kihasználjuk, hogy T csak időfüggő (azaz a jobb oldal rotációja nulla), az adódik, hogy $a^2(t)\mathbf{C}(t) = a_0\mathbf{C}_0$, ahol $\mathbf{C}_0$ állandó vektor. Az $n(\mathbf{r},t)$ helyett bevezetjük a $\zeta(\mathbf{r},t)$ függvényt az $n = n_0\frac{a_0^3}{a^3(t)}\exp\left\{\frac{m_0}{T_0 a_0^2}\zeta\right\}$ definícióval, így a következő egyenletek maradnak (B.5)-ből

[1] Ezt most formálisan külön is megindokolhatjuk: ha κ-t tetszőlegesnek választjuk, akkor (B.2) nyomát véve (és $\nabla T = 0$-t kihasználva), valamint (B.6)-ot és (B.7)-et kombinálva láthatjuk, hogy (hacsak T nem konstans időben is, ami a nem túl érdekes álló folyadék esetének felelne meg), csak $\kappa = D/2$ esetben létezhet a hidrodinamikai egyenleteknek és az ütközésmentes kinetikai egyenletnek közöt megoldása.

[2] Ezt a következőképpen láthatjuk be: ha feltesszük a $\mathbf{v} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{r} + \mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ alakot, akkor $\mathbf{A}$-ra a $\partial_k A_l + \partial_l A_k = 0$ feltételt kapjuk. A diagonális egyenletek először is azt adják, hogy csak $A_x(y,z,t)$, $A_y(x,z,t)$, $A_z(x,y,t)$ koordinátafüggés lehetséges, és ezt sorra behelyettesítve a nemdiagonális egyenletekbe kiadódik, hogy egyedül a felírt alak lehetséges.

és (B.11)-ből (innentől kezdve a és $\mathbf{D}$ argumentumait nem írom ki):

$$a\ddot{a}\mathbf{r} + a\dot{\mathbf{D}} + \frac{a_0^2}{a^2}\left(\mathbf{C}_0 \times (\mathbf{C}_0 \times \mathbf{r})\right) + \frac{a_0}{a}\mathbf{C}_0 \times \mathbf{D} + \nabla\zeta = 0, \tag{B.13}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r}\nabla\zeta + \frac{a_0}{a^2}\left(\mathbf{C}_0 \times \mathbf{r}\right)\nabla\zeta + \frac{\mathbf{D}}{a}\nabla\zeta = 0. \tag{B.14}$$

Az első egyenletből rögtön megkapjuk $\zeta(\mathbf{r}, t)$ általános alakját (egy szabad, de később meghatározódó $\xi(t)$ időfüggvénnyel):

$$\zeta = -\left(a\ddot{a} - \frac{a_0^2}{a^2}C_0^2\right)\frac{r^2}{2} - \frac{a_0^2}{2a^2}\left(\mathbf{C}_0\mathbf{r}\right)^2 - \left(a\dot{\mathbf{D}} + \frac{a_0}{a}\mathbf{C}_0 \times \mathbf{D}\right)\mathbf{r} + \xi(t), \tag{B.15}$$

és ezt a második egyenletbe helyettesítve kis átalakítások után arra jutunk, hogy

$$\frac{r^2}{2a^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3\ddot{a}\right) + \mathbf{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(a\mathbf{D}\right) - \left(\dot{\xi} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\right) = 0. \tag{B.16}$$

Az r-ben különböző fokú tagoknak külön-külön el kell tűnniük. Ebből megkapjuk először a időfüggését (itt az integrálási állandókat úgy írom, hogy a sebességmező egyből a kívánt, már ismert formában jelenjen meg):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3\ddot{a}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} = \frac{T_i}{m_0}\frac{a_0^2}{a^3} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 + \frac{T_i}{m_0}\frac{a_0^2}{a^2} = \frac{T_i}{m_0} \quad \Rightarrow \quad a^2(t) = \frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0\right)^2 + a_0^2,$$

valamint megállapíthatjuk, hogy $a\mathbf{D} = \mathbf{d}_1 t + \mathbf{d}_2$ kell, hogy teljesüljön (konstans $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ vektorokkal), továbbá $\xi = -\frac{D^2}{2} + K_0$ kell, hogy legyen. Ezzel a sebességmező ilyen alakba írható:

$$\mathbf{v} = \frac{\frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0\right)}{\frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0^2\right) + a_0^2}\mathbf{r} + \frac{a_0\mathbf{C}_0 \times \mathbf{r}}{\frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0^2\right) + a_0^2} + \frac{\mathbf{d}_1 t + \mathbf{d}_2}{\frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0^2\right) + a_0^2}, \tag{B.17}$$

Megfelelő térbeli eltolással, valamint egy Galilei-transzformációval elérhető, hogy a $\mathbf{d}_1$ és a $\mathbf{d}_2$ vektorokat nullává tegyük , és a részecskeszámsűrűség kifejezésénél n_0-ba beleolvaszthatjuk a konstansokat. Így tehát a nemrelativisztikus esetben az ütközésmentes áramlás általános alakja a következő:

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathbf{r} + \frac{a_0}{a^2(t)}\mathbf{C}_0 \times \mathbf{r}, \quad a^2(t) = \frac{T_i}{m_0}\left(t - t_0^2\right) + a_0^2, \tag{B.18}$$

$$n = n_0\frac{a_0^3}{a^3(t)}\exp\left\{-\frac{T_i}{2T_0}\frac{r^2}{a^2(t)} - \frac{m_0}{2T_0}\frac{1}{a^2(t)}\left(C_0^2 r^2 - \left(\mathbf{C}_0\mathbf{r}\right)^2\right)\right\}, \quad T = T_0\frac{a_0^2}{a^2(t)}, \tag{B.19}$$

Ez a 3.3. szakaszban idézett legáltalánosabb ütközésmentes nemrelativisztikus megoldás. A $\mathbf{C}_0$ vektor a folyás impulzusmomentumát határozza meg a 3.3. szakaszban leírt módon.

A $\mathbf{C}_0 = 0$ gömbszimmetrikus speciális eset volt ismert korábban is [43]: ezt a munkát követve a 3.3. szakaszban erre az esetre konkrétan felírtuk az f eloszlásfüggvényt olyan alakban, amiről látható, hogy valóban ütközésmentes áramlásról van szó. Ez a felírás természetesen érvényes bármilyen D dimenziószám esetén, és a hidrodinamikai megoldás is: így tehát a gömbszimmetrikus eset bármilyen D térdimenziószám esetén ütközésmentes áramlás.

B.2. A relativisztikus ütközésmentes áramlás

Ebben a szakaszban a (3.23) egyenlet alapján felderítjük azokat a relativisztikus hidrodinamikai megoldásokat, amelyek egyben tömeg nélküli részecskék ütközésmentes áramlásának felelhetnek meg. A megoldandó egyenlet:

$$g_{\mu\nu}\left(\partial_\rho A_\sigma + \partial_\sigma A_\rho\right) - g_{\rho\sigma}\left(\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu\right) = 0. \tag{B.20}$$

Láttuk továbbá, hogy $\varepsilon = \kappa p$ állapotegyenlet esetén $\kappa = D$ kell, hogy teljesüljön.

Itt is (mint a relativisztikus hidrodinamikai egyenletek önmagukban való vizsgálatánál is) külön figyelmet érdemel a $\kappa = D = 1$ eset, ezt először külön megvizsgáljuk, utána térünk át a $D \neq 1$ esetre. Az egydimenziós (tehát $D = 1$, $\kappa = 1$) esetben az A^μ vektor két komponensére a (B.20) egyenlet mindössze a következő feltételt adja (t és x az idő– ill. helykoordináta):

$$\frac{\partial A^1}{\partial t} = \frac{\partial A^0}{\partial x}, \quad \frac{\partial A^1}{\partial x} = \frac{\partial A^0}{\partial t}, \tag{B.21}$$

amin egyszerű hullámegyenletre vezet, megoldása rögtön felírható két haladó hullám összegeként az $x^\pm \equiv t \pm x$ fénykúpváltozókat használva:

$$A^0 = \frac{2}{T_0}\left(\frac{1}{f\left(x^+\right)} + \frac{1}{g\left(x^-\right)}\right), \quad A^1 = \frac{2}{T_0}\left(\frac{1}{f\left(x^+\right)} - \frac{1}{g\left(x^-\right)}\right), \tag{B.22}$$

ahol $f\left(x^+\right)$ és $g\left(x^-\right)$ tetszőleges egyváltozós függvények. Ezt az eredményt idézzük a 3.4.2. szakaszban. (A^μ alakját itt úgy írtuk fel, hogy egyből az ott idézett alakok adódjanak.)

A többdimenziós, $D \neq 1$ eset kicsit bonyolultabb, és a feltételeink nagyobb megszorító erejűek. A (B.20)-at ekkor úgy oldhatjuk meg, hogy A^μ-t egy Taylor-szerű sorba fejtjük. Ilyen kifejtés akkor létezik, ha u^μ és T sima függvények, és $T > 0$ egy tartományon. (Ha hidrodinamikai folyási képet keresünk, kell lennie ilyen tartománynak.) A kifejtés tehát:

$$A_\mu = a^{(1)}_\mu + a^{(2)}_{\mu\nu}x^\nu + a^{(3)}_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho + a^{(4)}_{\mu\nu\rho\sigma}x^\nu x^\rho x^\sigma + \ldots \tag{B.23}$$

Itt az $a^{(i)}$ együtthatók az utolsó $i-1$ indexükben teljesen szimmetrikus konstans tenzorok. Abból, hogy (B.20) x^μ-ben rendről rendre teljesüljön, a következő feltételeket kapjuk:

$$g_{\rho\sigma}a^{(2)}_{[\mu\nu]} = g_{\mu\nu}a^{(2)}_{[\rho\sigma]}, \quad g_{\rho\sigma}a^{(3)}_{[\mu\nu]\lambda} = g_{\mu\nu}a^{(3)}_{[\rho\sigma]\lambda}, \quad g_{\rho\sigma}a^{(4)}_{[\mu\nu]\lambda\eta} = g_{\mu\nu}a^{(4)}_{[\rho\sigma]\lambda\eta}, \quad \ldots \tag{B.24}$$

ahol szokásosan a szögletes zárójel szimmetrizációt jelent. Az $a^{(1)}$ tetszőleges négyesvektor lehet (ezt egyszerűen a^μ-vel fogjuk jelölni), $i \geq 2$-re pedig ezek a feltételek egyenértékűek a

$$a^{(i)}_{\mu\nu\lambda\ldots} + a^{(i)}_{\nu\mu\lambda\ldots} = g_{\mu\nu}T^{(i)}_{\lambda\ldots} \tag{B.25}$$

követelménnyel, ahol $T^{(i)}$ teljesen szimmetrikus tenzor (vagy vektor ill. skalár $i=3$-ra ill. $i=2$-re). A megoldást $i=2$-re rögtön felírhatjuk egy tetszőleges $F_{\mu\nu}$ antiszimmetrikus tenzorral és γ skalárral, $i \geq 3$-ra pedig (B.25)-öt átalakíthatjuk: először $\mu \leftrightarrow \lambda$, majd $\mu \leftrightarrow \nu$ antiszimmetrizációval, azután pedig $a^{(i)}$ szimmetriáját kihasználva és még egyszer alkalmazva (B.25)-öt megkapjuk az $a^{(i)}$-k kifejezését:

$$a^{(2)}_{\mu\nu} = \gamma g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}, \quad \text{illetve} \quad a^{(i)}_{\mu\nu\lambda\ldots} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}T^{(i)}_{\lambda\ldots} + g_{\mu\lambda}T^{(i)}_{\nu\ldots} - g_{\nu\lambda}T^{(i)}_{\mu\ldots}\right), \quad \text{ha} \quad i \geq 3. \tag{B.26}$$

Az $i=3$ esetben a $T^{(3)}_\lambda$ vektort b_λ-nak nevezve rögtön felírhatjuk, hogy

$$a^{(3)}_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}b_\lambda + g_{\mu\lambda}b_\nu - g_{\nu\lambda}b_\mu\right), \tag{B.27}$$

$i \geq 4$-re viszont további feltételeket jelent az, hogy $a^{(i)}_{\mu\nu\lambda\eta\ldots}$ szimmetrikus a $\lambda \leftrightarrow \eta$ cserére:

$$\left(g_{\mu\lambda}T^{(i)}_{\nu\eta\ldots} - g_{\mu\eta}T^{(i)}_{\nu\lambda\ldots}\right) - \left(g_{\nu\lambda}T^{(i)}_{\mu\eta\ldots} - g_{\nu\eta}T^{(i)}_{\mu\lambda\ldots}\right) = 0. \tag{B.28}$$

Könnyű belátni, hogy ennek az egyenletrendszernek már nincs nemtriviális megoldása $D > 1$-re. Legegyszerűbb talán komponensenként megtenni ezt. Most kétindexes $T_{\mu\nu}$ tenzort tekintünk, a többindexes ($T_{\mu\nu\ldots}$-ra vonatkozó) egyenletek teljesen hasonlóan kezelhetők. A (B.28) tenzoregyenletben a vegyes tér– ill. időkomponensekből (az indexeknek $\mu=0$, $\nu=i$, $\lambda=0$, $\eta=k$ értékeket kiosztva, ahol i, k hármasindexek) azt kapjuk, hogy $\delta_{ik}T_{00} = T_{ik}$. Ezt felhasználva a csak térkomponensekből ($\mu=i$, $\nu=k$, $\lambda=l$, $\eta=m$) a $(\delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl})\,T_{00} = 0$ feltétel következik. Ez utóbbiban δ_{il}-lel összeejtve az indexeket azt kapjuk, hogy $(D-1)\,\delta_{km}T_{00} = 0$, és az előzőek alapján $(D-1)\,T_{km} = 0$ is teljesül. (D dimenziós térben $\delta_{kk} = D$). Itt látszik, hogy különválik a $D=1$ eset, mert ekkor (B.28) csak egy kis extra feltételt jelent $T_{\mu\nu}$-re, de $D > 1$-re T_{00}-nak és T_{ik}-nak is el kell tűnnie. A vegyes T_{0k} komponensekre pedig a $\mu=i$, $\nu=k$, $\lambda=0$,

$\eta = l$ index-kiosztással kaphatjuk a $\delta_{il} T_{k0} = \delta_{kl} T_{i0}$ feltételt, amiből az i, l indexeket összeejtve az adódik, hogy $(D-1)\, T_{i0} = 0$. Itt is látható, hogy ha $D > 1$, akkor a T_{0k} komponensek is eltűnnek. (Ha $D = 1$, akkor megint csupán egy kis megszorítást kapunk $T_{\mu\nu}$-re.)

Összefoglalva tehát: $D = 1$ dimenzióban az általános ütközésmentes megoldást a (B.22) egyenlet írja le, $D > 1$ dimenzióban pedig a (B.20) egyenlet megoldása a következő:

$$A^{\mu}(x) = a^{\mu} + \gamma x^{\mu} + F^{\mu\nu} x_{\nu} + (b^{\nu} x_{\nu})\, x^{\mu} - \frac{b^{\mu}}{2} (x^{\nu} x_{\nu})\,. \tag{B.29}$$

Ebből kaphatjuk a 3.4.1. szakaszban vizsgált különböző megoldásokat.

Irodalomjegyzék

[1] E. V. Shuryak: *Quantum Chromodynamics and the theory of superdense matter*, Phys. Rept. **61**, 71 (1980).

[2] N. Cabibbo, G. Parisi: *Exponential hadronic spectrum and quark liberation*, Phys. Lett. B **59**, 67 (1975).

[3] R. Hagedorn: *Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies*, Nuovo Cim. Suppl. **3**, 147 (1965),
R. Hagedorn, J. Ranft: *Statistical thermodynamics of strong interactions at high-energies. 2. Momentum spectra of particles produced in p p collisions*, Nuovo Cim. Suppl. **6**, 169 (1968).

[4] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration]: *Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration*, Nucl. Phys. A **757**, 184 (2005).

[5] J. Adams *et al.* [STAR Collaboration]: *Experimental and theoretical challenges in the search for the quark gluon plasma: The STAR Collaboration's critical assessment of the evidence from RHIC collisions*, Nucl. Phys. A **757**, 102 (2005).

[6] I. Arsene *et al.* [BRAHMS Collaboration]: *Quark gluon plasma and color glass condensate at RHIC? The Perspective from the BRAHMS experiment*, Nucl. Phys. A **757**, 1 (2005).

[7] B. B. Back *et al.* [PHOBOS Collaboration]: *The PHOBOS perspective on discoveries at RHIC*, Nucl. Phys. A **757**, 28 (2005).

[8] D. J. Gross, F. Wilczek: *Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).

[9] H. D. Politzer: *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).

[10] R. Hanbury Brown, R. Q. Twiss: *A Test of a new type of stellar interferometer on Sirius*, Nature **178**, 1046 (1956).

[11] G. Goldhaber, S. Goldhaber, W. Y. Lee, A. Pais: *Influence of Bose-Einstein statistics on the anti-proton proton annihilation process*, Phys. Rev. **120**, 300 (1960).

[12] G. Cocconi: *Empirical model for ultrarelativistic nucleon-nucleon collisions*, Phys. Rev. **111**, 1699 (1958).

[13] J. Orear: *Transverse Momentum Distribution of Protons in p-p Elastic Scattering*, Phys. Rev. Lett. **12**, 112 (1964).

[14] K. Adcox *et al.* [PHENIX Collaboration]: *Suppression of hadrons with large transverse momentum in central Au+Au collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 130\ GeV$, Phys. Rev. Lett. **88**, 022301 (2002).

[15] S. S. Adler *et al.* [PHENIX Collaboration]: *Absence of suppression in particle production at large transverse momentum in* $\sqrt{s_{NN}} = 200\ GeV$ *d+Au collisions*, Phys. Rev. Lett. **91**, 072303 (2003).

[16] P. Kovtun, D. T. Son, A. O. Starinets: *Viscosity in strongly interacting quantum field theories from black hole physics*, Phys. Rev. Lett. **94**, 111601 (2005).

[17] R. A. Lacey, A. Taranenko: *What do elliptic flow measurements tell us about the matter created in the little bang at RHIC?*, PoS CFRNC **2006**, 021 (2006).

[18] M. Csanád, T. Csörgő, A. Ster, B. Lörstad, N. N. Ajitanand, J. M. Alexander, P. Chung, W. G. Holzmann *et al.*: *Universal scaling of the elliptic flow data at RHIC*, Eur. Phys. J. A **38**, 363 (2008).

[19] A. Adare *et al.* [PHENIX Collaboration]: *Enhanced production of direct photons in Au+Au collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 200\ GeV$ *and implications for the initial temperature*, Phys. Rev. Lett. **104**, 132301 (2010).

[20] S. Borsányi, G. Endrődi, Z. Fodor, A. Jakovác, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti, K. K. Szabó: *The QCD equation of state with dynamical quarks* JHEP **1011** (2010) 077.

[21] F. Antinori: *The high energy frontier of ultrarelativistic nucleus-nucleus collisions*, J. Phys. G G**38**, 124038 (2011).

[22] E. Fermi: *High-energy nuclear events*, Prog. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).

[23] L. D. Landau: *On the multiparticle production in high-energy collisions*, Izv. Akad. Nauk Ser. Fiz. **17**, 51 (1953).

[24] I.M. Khalatnikov, Zhur. Eksp. Teor. Fiz. **27**, 529 (1954). (*„A relativisztikus hidrodinamika néhány kérdése"*, oroszul.)

[25] S. Z. Belenkij, L. D. Landau: *Hydrodynamic theory of multiple Ppoduction of particles*, Nuovo Cim. Suppl. **3S10**, 15 (1956). [Usp. Fiz. Nauk **56**, 309 (1955)].

[26] T. Csörgő: *Particle interferometry from 40 MeV to 40 TeV*, Heavy Ion Phys. **15**, 1 (2002).

[27] R. M. Weiner: *Introduction to Bose-Einstein correlations and subatomic interferometry*, John Wiley (2000).

[28] P. J. Siemens, J. O. Rasmussen: *Evidence for a blast wave from compressed nuclear matter*, Phys. Rev. Lett. **42**, 880 (1979).

[29] T. Csörgő, B. Lörstad: *Bose-Einstein correlations for expanding finite systems*, Nucl. Phys. A **590** 465C (1995).

[30] T. Csörgő, B. Lörstad: *Bose-Einstein correlations for three-dimensionally expanding, cylindrically symmetric, finite systems*, Phys. Rev. C **54** 1390 (1996).

[31] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad: *Buda-Lund hydro model for ellipsoidally symmetric fireballs and the elliptic flow at RHIC*, Nucl. Phys. A **742** 80 (2004).

[32] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, A. Ster: *Indication of quark deconfinement and evidence for a Hubble flow in 130-GeV and 200-GeV Au+Au collisions*, J. Phys. G **30** S1079 (2004).

[33] F. Csikor, G. I. Egri, Z. Fodor, S. D. Katz, K. K. Szabó, A. I. Tóth: *Equation of state at finite temperature and chemical potential, lattice QCD results*, JHEP **0405**, 046 (2004).

[34] T. Csörgő, S. V. Akkelin, Y. Hama, B. Lukács, Yu. M. Sinyukov: *Observables and initial conditions for selfsimilar ellipsoidal flows*, Phys. Rev. C **67**, 034904 (2003).

[35] L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti Fizika VI. Hidrodinamika, Tankönyvkiadó, Budapest (1980).

[36] `http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/`

[37] C. Eckart: *The Thermodynamics of irreversible processes. 3. Relativistic theory of the simple fluid*, Phys. Rev. **58**, 919 (1940).

[38] W. A. Hiscock, L. Lindblom: *Generic instabilities in first-order dissipative relativistic fluid theories*, Phys. Rev. D **31**, 725 (1985).

[39] W. Israel, J. M. Stewart: *Transient relativistic thermodynamics and kinetic theory*, Annals Phys. **118**, 341 (1979).

[40] P. Ván, T. S. Biró: *Relativistic hydrodynamics - causality and stability*, Eur. Phys. J. ST **155**, 201 (2008).

[41] T. Csörgő, *Simple solutions of fireball hydrodynamics for selfsimilar, ellipsoidal flows*, Acta Phys. Polon. B **37**, 483 (2006).

[42] Nagy Márton: *A tökéletesfolyadék-kép vizsgálata nehézion-ütközésekben*, ELTE fizikus szak diplomamunka, 2007.

[43] P. Csizmadia, T. Csörgő, B. Lukács: *New analytic solutions of the non-relativistic hydrodynamical equations*, Phys. Lett. B **443**, 21 (1998).

[44] J. Bondorf, S. Garpman, J. Zimányi: *A simple analytic hydrodynamical model for expanding fireballs*, Nucl. Phys. A **296**, 320 (1978).

[45] R. C. Hwa: *Statistical description of hadron constituents as a basis for the fluid model of high-energy collisions*, Phys. Rev. D **10**, 2260 (1974).

[46] J. D. Bjorken: *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: the central rapidity region*, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).

[47] M. Gyulassy, T. Matsui: *Quark gluon plasma evolution in scaling hydrodynamics*, Phys. Rev. D **29**, 419 (1984).

[48] T. Csörgő, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama: *Simple solutions of relativistic hydrodynamics for longitudinally and cylindrically expanding systems*, Phys. Lett. B **565**, 107 (2003).

[49] T. Csörgő, L. P. Csernai, Y. Hama, T. Kodama: *Simple solutions of relativistic hydrodynamics for systems with ellipsoidal symmetry*, Heavy Ion Phys. A **21**, 73 (2004).

[50] T. Csörgő, M. I. Nagy, M. Csanád: *A new family of simple solutions of perfect fluid hydrodynamics*, Phys. Lett. B **663**, 306 (2008).

[51] M. I. Nagy, T. Csörgő, M. Csanád: *Detailed description of accelerating, simple solutions of relativistic perfect fluid hydrodynamics*, Phys. Rev. C **77**, 024908 (2008).

[52] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, A. Ster: *An Indication for deconfinement in Au+Au collisions at RHIC*, Acta Phys. Polon. B **35**, 191 (2004).

[53] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, A. Ster: *A hint at quark deconfinement in 200-GeV Au+Au data at RHIC*, Nukleonika **49**, S49 (2004).

[54] W. G. Unruh: *Notes on black hole evaporation*, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).

[55] D. Kharzeev, K. Tuchin: *From color glass condensate to quark gluon plasma through the event horizon*, Nucl. Phys. A **753**, 316 (2005).

[56] T. S. Biró, *private communication.*

[57] M. S. Borshch, V. I. Zhdanov: *Exact solutions of the equations of relativistic hydrodynamics representing potential flows*, SIGMA **3**, 116 (2007).

[58] M. I. Nagy: *New simple explicit solutions of perfect fluid hydrodynamics and phase-space evolution*, Phys. Rev. C **83**, 054901 (2011).

[59] A. Ster, M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad and B. Tomasik: *Spectra, elliptic flow and azimuthally sensitive HBT radii from Buda-Lund model for* $\sqrt{s_{NN}} = 200$ *GeV Au+Au collisions*, Eur. Phys. J. A **47**, 58 (2011).

[60] L. D. Landau, E. M. Lifsic: Elméleti Fizika X. Kinetikus fizika, Tankönyvkiadó, Budapest (1980).

[61] J. Cleymans, K. Redlich: *Unified description of freezeout parameters in relativistic heavy ion collisions*, Phys. Rev. Lett. **81**, 5284 (1998).

[62] T. S. Biró, J. Cleymans: *The hadronization line in stringy matter*, Phys. Rev. C **78**, 034902 (2008).

[63] F. Cooper, G. Frye: *Comment on the single particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production*, Phys. Rev. D **10**, 186 (1974).

[64] M. Csanád, T. Csörgő, B. Lörstad, A. Ster: *Universal scaling of the rapidity dependent elliptic flow and the perfect fluid at RHIC*, Nucl. Phys. A **774**, 535 (2006).

[65] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration]: *Charged meson rapidity distributions in central Au+Au collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 200$ *GeV*, Phys. Rev. Lett. **94**, 162301 (2005).

[66] E. Schnedermann, J. Sollfrank, U. W. Heinz: *Thermal phenomenology of hadrons from 200-A/GeV S+S collisions*, Phys. Rev. C **48**, 2462 (1993).

[67] I. G. Bearden *et al.* [BRAHMS Collaboration]: *Pseudorapidity distributions of charged particles from Au+Au collisions at the maximum RHIC energy*, Phys. Rev. Lett. **88**, 202301 (2002).

[68] K. Morita: *Rapidity dependence of HBT radii based on a hydrodynamical model*, Braz. J. Phys. **37**, 1039 (2007).

[69] A. Makhlin & Yu. Sinyukov: *The hydrodynamics of hadron matter under a pion interferometric microscope*, Z. Phys. C**39**, 69 (1988).

[70] U. A. Wiedemann: *Space-time analysis: HBT at SPS and RHIC*, Nucl. Phys. A **661**, 65C (1999).

[71] T. Renk: *Why a long-lived fireball can be compatible with HBT measurements*, Phys. Rev. C **69**, 044902 (2004).

[72] A. Toia: *Bulk properties of Pb-Pb collisions at* $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ *TeV measured by ALICE*, J. Phys. G G **38**, 124007 (2011).

[73] A. Bialas, R. A. Janik, R. Peschanski: *Unified description of Bjorken and Landau 1+1 hydrodynamics*, Phys. Rev. C **76**, 054901 (2007).

[74] G. Beuf, R. Peschanski, E. N. Saridakis: *Entropy flow of a perfect fluid in (1+1) hydrodynamics*, Phys. Rev. C **78**, 064909 (2008).

[75] S. Pratt: *A co-moving coordinate system for relativistic hydrodynamics*, Phys. Rev. C **75**, 024907 (2007).

[76] S. S. Gubser: *Symmetry constraints on generalizations of Bjorken flow*, Phys. Rev. D **82**, 085027 (2010).

[77] T. S. Biró: *Generating new solutions for relativistic transverse flow at the softest point*, Phys. Lett. B **487**, 133 (2000).

[78] Yu. M. Sinyukov, I. A. Karpenko: *Ellipsoidal flows in relativistic hydrodynamics of finite systems*, Acta Phys. Hung. A **25**, 141 (2006).